

KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMIK *HOST-VECTOR* DENGAN SIMULASI MENGGUNAKAN *FORWARD-BACKWARD SWEEP METHOD*

Dewi Erla Mahmudah¹, Muhammad Zidny Naf'an²

¹. STMIK Asia Malang, ². Fasilkom Universitas Indonesia

e-mail: mdewierla@gmail.com, muhhammad.zidny@ui.ac.id

ABSTRAKSI

Model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung diperluas dengan tiga pengendalian, yaitu kontrol pencegahan untuk meminimalkan kontak antara *host-vektor*, kontrol insektisida untuk *vector*, dan kontrol pengobatan pada *host* yang terinfeksi. Tujuannya adalah untuk memperoleh strategi pencegahan yang optimal dengan biaya minimal. Karakterisasi kontrol optimal dilakukan secara analitik dengan menerapkan prinsip Minimum Pontryagin. Sistem kontinu yang diperoleh kemudian diselesaikan secara numerik dengan Forward-Backward Sweep Method untuk menyelidiki upaya pengendalian yang efektif dalam meminimalkan kejadian infeksi antara *host-vector*.

Kata kunci : *Model epidemik host-vector, Transmisi langsung, Kontrol optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Forward-Backward Sweep Method.*

ABSTRACT

Vector-host epidemic model with direct transmission expanded by three controls namely prevention to minimize contact between vector-host, insecticides and treatment. The objective is to obtain optimal prevention strategy with the minimum cost. Characterization optimal control done analytically by applying the Pontryagin Minimum Principle. The optimality system is then settled numerically with Forward-Backward Sweep Method to investigate that is effective in controlling effort to minimize the occurrence of an infection between hosts and vectors.

Keywords : *Vector-host epidemic model, Direct transmission, Optimal control, Pontryagin Minimum Principle, Forward-Backward Sweep Method.*

PENDAHULUAN

Penyakit menular adalah suatu penyakit yang dapat menular kepada individu (*host*) tertentu. Penyakit menular pada umumnya disebabkan oleh suatu agen (*vector*) biologi seperti bakteri, virus, jamur, atau parasit, dan bukan disebabkan oleh faktor fisik, seperti trauma benturan dan luka bakar, maupun faktor kimia, seperti keracunan. Penularan penyakit pada manusia melalui *vector* penyakit berupa serangga merupakan penyakit yang bersifat endemik maupun epidemik pada suatu daerah tertentu. Penyakit tersebut antara lain seperti malaria, demam berdarah, chikungunya, kaki gajah, disentri, dan lain-lain.

Model matematika berperan penting dalam suatu permasalahan dinamika penularan penyakit. Sebuah model sederhana

berperan penting dalam pengembangan pemahaman yang lebih baik dalam studi epidemiologi karena dapat membantu untuk memahami pola-pola epidemiologi yang diamati dan menerapkan berbagai strategi pengendalian penularan penyakit. Berbagai macam strategi pengendalian penyakit telah dilakukan dengan tujuan meminimalkan *host* yang terkena penyakit maupun sebagai upaya pencegahan. Baru-baru ini banyak penulis yang menganalisis strategi pengendalian penyakit pada model epidemik *host* dan *vector*. Misalnya, Augusto dkk. (2012) yang menganalisis strategi pengendalian penyakit malaria dengan menerapkan kontrol pada *host* yang rentan berupa pemberian tirai pada tempat tidur, kontrol pengobatan pada *host* yang terinfeksi, dan penyemprotan pada *vector*. Selain itu, Roddrigues dkk. (2012) telah melakukan

penelitian dengan studi kasus penyakit demam berdarah di daerah pulau Cape Verde yang melibatkan kontrol yang diberikan pada *vector* yaitu kontrol pada larva, kontrol pada *vector* yang rentan, dan kontrol mekanik pada habitat *vector*. Ozair dkk. (2012) juga telah melakukan penelitian tentang model epidemik *vector-borne* dengan laju infeksi nonlinear yang melibatkan kontrol pencegahan pada *host* yang rentan, kontrol pengobatan pada *host* yang terinfeksi, dan kontrol mekanik pada habitat *vector*. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa strategi pengendalian ini secara efektif dapat meminimalkan *host* yang terinfeksi.

Dalam memodelkan transmisi penyakit pada *host* dan *vector*, banyak penulis menganggap bahwa infeksi penyakit seperti malaria maupun demam berdarah ditransmisikan ke populasi manusia oleh serangga atau *vector*. Salah satunya adalah Kong dkk. (2011) yang membahas kontrol optimal model epidemik *host-vector*. Namun, beberapa studi kasus menunjukkan bahwa transmisi langsung seperti penularan *host* yang rentan oleh *host* yang terinfeksi juga dapat terjadi seperti pada penelitian Cai dan Li (2010). Tipe model *SIS* diterapkan dalam model epidemik pada *host* dan *vector* ini, dimana populasi *host* dan *vector* dibagi menjadi individu yang rentan dan individu yang terinfeksi.

Berdasarkan uraian di atas, dalam penelitian ini dibahas kontrol optimal model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung sebagai pengembangan dari penelitian Cai dan Li (2010). Pengembangan yang dilakukan pada penelitian ini adalah dengan menambahkan variabel kontrol pada model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung. Variabel-variabel kontrol tersebut adalah $u_1(t)$ dan $u_2(t)$. Kontrol $u_1(t)$ merupakan pencegahan kontak antara subpopulasi *vector* yang terinfeksi dengan subpopulasi *host* yang rentan, misalnya dengan pemakaian obat pada *host* yang rentan, dan kontrol $u_2(t)$ merupakan kontrol penyemprotan pada populasi *vector*. Penerapan kontrol pada model bertujuan untuk meminimalkan *host* yang terinfeksi dengan biaya yang minimum. Kontrol yang optimal ditentukan dengan menggunakan Hamiltonian. Kondisi-kondisi yang diperlukan untuk menentukan kontrol

optimal diperoleh dengan mengaplikasikan Prinsip Minimum Pontryagin.

KAJIAN TEORI

1. Teori Kontrol Optimal

Untuk memudahkan pemahaman permasalahan kontrol optimal, disajikan permasalahan dasar sebagai berikut.

Minimumkan

$$J(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \int f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \quad (1)$$

dengan kendala

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (2)$$

dengan

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

dan

$$\mathbf{u}(t) \in U, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Persamaan (1) merupakan fungsi objektif dengan

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ adalah n -vektor *state* dan

$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))^T$ adalah m -vektor kontrol. Vektor *state* $\mathbf{x}(t)$

memodelkan suatu keadaan. Hubungan $\mathbf{u}(t)$ dan $\mathbf{x}(t)$ dapat dilihat pada persamaan (2)

yang disebut persamaan *state*. Pada persamaan (3) ditentukan suatu *state* awal

pada saat $t = 0$ yaitu \mathbf{x}_0 , sedangkan persamaan (4) menyatakan bahwa $\mathbf{u}(t)$

anggota daerah kontrol U (Chiang dan Wainwright, 1927).

2. Fungsi Hamilton

Fungsi Hamilton dengan tiga variabel, yaitu $t, \mathbf{x}, \mathbf{u}$ yang masing-masing merepresentasikan waktu, vektor *state*, dan vektor kontrol, didefinisikan sebagai

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\gamma}(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

dengan $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_s(t))^T$ adalah s -vektor *costate* (Chiang dan Wainwright, 1927).

3. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal karena prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal. Prinsip ini digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal yang meminimumkan fungsi objektif persamaan (1) dengan kendala persamaan (2) dan diberikan daerah kontrol persamaan (4).

Prosedur menyelesaikan masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin adalah sebagai berikut.

- Langkah 1 :
Membentuk fungsi Hamilton

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\gamma}(t) \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).$$
- Langkah 2 :
Mencari solusi fungsi Pontryagin yang memenuhi kondisi stasioner

$$\frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\gamma}(t))}{\partial \mathbf{u}} = 0$$
 untuk mendapatkan $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\gamma}(t))$.
- Langkah 3 :
Mengamati $H^*(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)) = H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\gamma}(t)), \boldsymbol{\gamma}(t)) = \min_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\gamma}(t))$.
- Langkah 4 :
Menyelesaikan $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\gamma}(t))}{\partial \mathbf{x}}$ (persamaan state), dan $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\gamma}(t))}{\partial \boldsymbol{\gamma}}$ (persamaan costate) dengan kondisi transversal $\boldsymbol{\gamma}(T) = 0$.
- Langkah 5 :
Mensubstitusikan hasil dari Langkah 4 ke \mathbf{u}^* untuk menentukan kontrol optimal (Gopal, 1985).

4. Forward-Backward Sweep Method

Terdapat beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal, salah satunya ialah metode Sweep Maju-Mundur. Secara garis besar, algoritma metode ini sebagai berikut.

- Langkah 1:
Menentukan nilai awal \mathbf{u} dan menyimpan nilai \mathbf{u} .
- Langkah 2:
Menggunakan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ dan nilai awal \mathbf{u} untuk menyelesaikan persamaan state (\mathbf{x}) dengan langkah maju metode Runge-Kutta orde 4.
- Langkah 3:
Menggunakan kondisi transversal $\boldsymbol{\gamma}(T) = 0$ dan nilai \mathbf{u} dan \mathbf{x} untuk menyelesaikan persamaan costate ($\boldsymbol{\gamma}$) dengan langkah mundur metode Runge Kutta orde 4.
- Langkah 4:

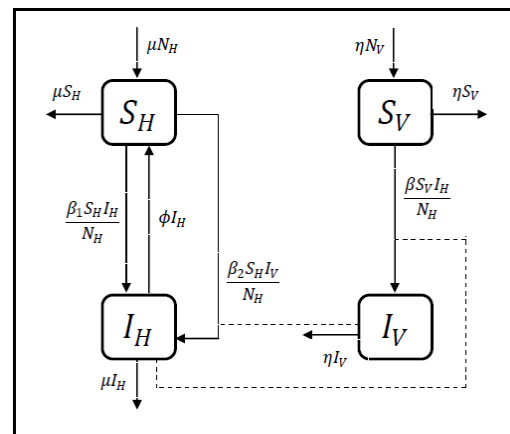
Memperbarui nilai kontrol \mathbf{u} dengan memasukkan nilai \mathbf{x} dan $\boldsymbol{\gamma}$ yang baru ke dalam karakteristik dari \mathbf{u} .

- Langkah 5:
Jika nilai error dari setiap variabel dalam iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka cetak nilai-nilai saat ini sebagai solusi. Tetapi, jika nilai errornya tidak sangat kecil maka kembali ke langkah 2 (Lenhart dan Workman, 2007).

5. Model Epidemik Host-Vektor dengan Transmisi Langsung

Model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung dimodelkan dengan model kompartemen tipe *SIS*, dimana *S* (*susceptibles*) menunjukkan individu yang rentan dan *I* (*infectious*) menunjukkan individu yang terinfeksi. Populasi *host* dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu subpopulasi *host* yang rentan (S_H) dan subpopulasi *host* yang terinfeksi (I_H). Diasumsikan total populasi *host*, yang dinotasikan sebagai N_H adalah konstan, sehingga $N_H(t) = S_H(t) + I_H(t)$. Begitu juga dengan populasi *vector* yang dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu subpopulasi *vector* yang rentan (S_V) dan subpopulasi *vector* yang terinfeksi (I_V). Total populasi *vector* adalah konstan dan dinotasikan sebagai N_V , dengan $N_V(t) = S_V(t) + I_V(t)$. Nilai $S_H(t), I_H(t), S_V(t)$, dan $I_V(t)$ tidak pernah bernilai negatif karena menyatakan jumlah populasi.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah diberikan pada batasan masalah pada Bab I, secara skematis penyebaran penyakit *host-vector* dengan transmisi langsung dapat digambarkan dalam model kompartemen seperti pada Gambar 1 dengan parameter-parameter pada Tabel 1.



Gambar 1. Model kompartemen epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung

Tabel 1. Parameter-parameter model epidemi *host-vector* dengan transmisi langsung

Parameter	Keterangan
μ	Laju kelahiran dan kematian alami populasi <i>host</i>
η	Laju kelahiran dan kematian alami populasi <i>vector</i>
β_1	Laju infeksi subpopulasi <i>host</i> yang rentan akibat kontak dengan subpopulasi <i>host</i> yang terinfeksi
β_2	Laju infeksi subpopulasi <i>host</i> yang rentan akibat kontak dengan subpopulasi <i>vector</i> yang terinfeksi
β	Laju infeksi subpopulasi <i>vector</i> yang rentan akibat kontak dengan subpopulasi <i>host</i> yang terinfeksi
ϕ	Laju kesembuhan subpopulasi <i>host</i> yang terinfeksi

Model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{dS_H(t)}{dt} = \mu N_H(t) - \frac{\beta_1 S_H(t) I_H(t)}{N_H(t)} - \frac{\beta_2 S_H(t) I_V(t)}{N_H(t)} + \phi I_H(t) - \mu S_H(t) \\ \frac{dI_H(t)}{dt} = \frac{\beta_2 S_H(t) I_V(t)}{N_H(t)} + \frac{\beta_1 S_H(t) I_H(t)}{N_H(t)} - (\mu + \phi) I_H(t) \\ \frac{dS_V(t)}{dt} = \eta N_V(t) - \frac{\beta S_V(t) I_H(t)}{N_H(t)} - \eta S_V(t) \\ \frac{dI_V(t)}{dt} = \frac{\beta S_V(t) I_H(t)}{N_H(t)} - \eta I_V(t) \end{cases}$$

Untuk penyederhanaan penulisan, fungsi-fungsi terhadap t dinyatakan $S_H(t) = S_H, I_H(t) = I_H, S_V(t) = S_V, I_V(t) = I_V$.

Misal

$$\hat{S}_H = \frac{S_H}{N_H}, \hat{I}_H = \frac{I_H}{N_H}, \hat{S}_V = \frac{S_V}{N_V}, \hat{I}_V = \frac{I_V}{N_V}, \text{ dan}$$

$m = \frac{N_V}{N_H}$, maka sistem persamaan model *host-vector* dengan transmisi langsung adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{d\hat{S}_H}{dt} = \mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H \\ \frac{d\hat{I}_H}{dt} = m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi) \hat{I}_H \\ \frac{d\hat{S}_V}{dt} = \eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V \\ \frac{d\hat{I}_V}{dt} = \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V \end{cases}$$

Dinamika sistem persamaan di atas dibatasi pada daerah Γ yang didefinisikan sebagai

$$\Gamma = \{(S_H, I_H, S_V, I_V) \in R^4_+ : S_H, I_H, S_V, I_V \geq 0, S_H + I_H = 1, S_V + I_V = 1\}.$$

Cai dan Li, 2010).

PEMBAHASAN

1. Model Epidemik *Host-Vector* dengan Transmisi Langsung dengan Kontrol

Model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung diperluas dengan menambahkan tiga variabel kontrol, yaitu kontrol pencegahan $u_1(t)$ berupa pemberian obat pada *host* rentan, kontrol insektisida $u_2(t)$ berupa pembasmian seluruh populasi *vector* dengan laju sebesar c , dan kontrol pengobatan $u_3(t)$ berupa pemberian obat pada *host* yang terinfeksi. Model ini berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear sebagai berikut.

$$\frac{d\hat{S}_H}{dt} = \mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H + u_3(t) \hat{I}_H$$

$$\frac{d\hat{I}_H}{dt} = (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi) \hat{I}_H - u_3(t) \hat{I}_H$$

$$\frac{d\hat{S}_V}{dt} = \eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V - cu_2 \hat{S}_V$$

$$\frac{d\hat{I}_V}{dt} = \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V - cu_2 \hat{I}_V. \tag{5}$$

2. Penyelesaian Kontrol Optimal

Penyelesaian kontrol optimal di sini bertujuan untuk meminimumkan subpopulasi *host* yang terinfeksi dan biaya yang digunakan untuk menerapkan kontrol u_1, u_2 , dan u_3 yaitu dengan meminimumkan fungsi objektif berikut

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T BI_H(t) + Cu_1^2(t) + Du_2^2(t) + Eu_3^2(t)dt,$$

dengan kendala sistem persamaan (5), dengan B adalah bobot yang dikenakan pada *host* yang terinfeksi, C adalah bobot pada biaya pemakaian obat pada *host* yang rentan, D adalah bobot pada biaya penyemprotan pada populasi *vector*, dan E adalah bobot pada biaya pemberian obat pada *host* yang terinfeksi, dengan $t \in [0, T]$. Kemudian akan ditentukan kontrol optimal \bar{u}_1, \bar{u}_2 dan \bar{u}_3 sehingga berlaku

$$J(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \min\{J(u_1, u_2, u_3) | u_1, u_2, u_3 \in U\},$$

dimana

$$U = \{(u_1, u_2, u_3) : 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq u_3 \leq 1\}.$$

Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan memenuhi kondisi-kondisi pada Prinsip Minimum Pontryagin. Terlebih dahulu didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut

$$\begin{aligned} H = & BI_H + Cu_1^2 + Du_2^2 + Eu_3^2 \\ & + \gamma_{S_H}(\mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H + u_3 \hat{I}_H) \\ & + \gamma_{I_H}((1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi)\hat{I}_H - u_3 \hat{I}_H) \\ & + \gamma_{S_V}(\eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V - cu_2 \hat{S}_V) \\ & + \gamma_{I_V}(\beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V - cu_2 \hat{I}_V), \end{aligned}$$

dengan

$$\gamma_{S_H} = \gamma_{S_H}(t), \gamma_{I_H} = \gamma_{I_H}(t), \gamma_{S_V} = \gamma_{S_V}(t) \text{ dan } \gamma_{I_V} = \gamma_{I_V}(t)$$

adalah variabel *costate*.

Menurut Prinsip Minimum Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

A. Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner untuk kontrol u_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 & \Leftrightarrow 2Cu_1 + m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V \gamma_{S_H} - m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V \gamma_{I_H} = 0 \\ \Leftrightarrow \bar{u}_1 & = \frac{(\gamma_{I_H} - \gamma_{S_H})m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V}{2C}. \end{aligned}$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_1 \leq 1$, solusi \bar{u}_1 adalah

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} 0, & \bar{u}_1 \leq 0 \\ \bar{u}_1, & 0 \leq \bar{u}_1 \leq 1 \\ 1, & \bar{u}_1 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal \bar{u}_1 dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_1 = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\gamma_{I_H} - \gamma_{S_H})m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V}{2C} \right), 1 \right\}. \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow 2Du_2 - \gamma_{S_V} c \hat{S}_V - \gamma_{I_V} c \hat{I}_V = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_2 = \frac{\gamma_{S_V} c \hat{S}_V + \gamma_{I_V} c \hat{I}_V}{2D}.$$

Kodisi stationer untuk kontrol u_2 :

Karena didefinisikan $0 \leq u_2 \leq 1$, solusi \bar{u}_2 adalah

$$\bar{u}_2 = \begin{cases} 0, & \bar{u}_2 \leq 0 \\ \bar{u}_2, & 0 \leq \bar{u}_2 \leq 1 \\ 1, & \bar{u}_2 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal \bar{u}_2 dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_2 = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{S_V} c \hat{S}_V + \gamma_{I_V} c \hat{I}_V}{2D} \right), 1 \right\}. \quad (7)$$

Kodisi stationer untuk kontrol u_3 :

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \Leftrightarrow 2Eu_3 + \gamma_{S_H} \hat{I}_H - \gamma_{I_H} \hat{I}_H = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_3 = \frac{\gamma_{I_H} \hat{I}_H - \gamma_{S_H} \hat{I}_H}{2E}.$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_3 \leq 1$, solusi \bar{u}_3 adalah

$$\bar{u}_3 = \begin{cases} 0, & \bar{u}_3 \leq 0 \\ \bar{u}_3, & 0 \leq \bar{u}_3 \leq 1 \\ 1, & \bar{u}_3 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal \bar{u}_3 dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_3 = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{I_H} \hat{I}_H - \gamma_{S_H} \hat{I}_H}{2E} \right), 1 \right\}. \quad (8)$$

B. Persamaan *State*

Persamaan *state* untuk model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung dengan kontrol adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dy_{S_H}} &= \frac{d\hat{S}_H}{dt} = \mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H + u_3 \hat{I}_H \\ \frac{dH}{dy_{I_H}} &= \frac{d\hat{I}_H}{dt} = (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi) \hat{I}_H - u_3 \hat{I}_H \\ \frac{dH}{dy_{S_V}} &= \frac{d\hat{S}_V}{dt} = \eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V - cu_2 \hat{S}_V \\ \frac{dH}{dy_{I_V}} &= \frac{d\hat{I}_V}{dt} = \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V - cu_2 \hat{I}_V. \end{aligned} \quad (9)$$

dengan kondisi awal

$$S_H(0) = S_{H_0}, I_H(0) = I_{H_0}, S_V(0) = S_{V_0}, \text{ dan } S_H(0) = I_{V_0}.$$

C. Persamaan Costate

Persamaan *costate* untuk model epidemik *host-vector* dengan transmisi langsung dengan kontrol adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{S_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{S}_H} = (\beta_1 \hat{I}_H + (1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V + \mu) \gamma_{S_H} \\ &\quad + (-(1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V - \beta_1 \hat{I}_H) \gamma_{I_H} \\ \frac{d\gamma_{I_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{I}_H} = -B + (\beta_1 \hat{S}_H - \phi - u_3) \gamma_{S_H} \\ &\quad + (-\beta_1 \hat{S}_H + \mu + \phi + u_3) \gamma_{I_H} + \beta \hat{S}_V \gamma_{S_V} - \beta \hat{I}_V \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{S_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{S}_V} = (\beta \hat{I}_H + \eta + cu_2) \gamma_{S_V} - \beta \hat{I}_H \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{I_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{I}_V} = (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{S_H} - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{I_H} \\ &\quad + (\eta + cu_2) \gamma_{I_V} \end{aligned} \quad (10)$$

dengan kondisi transversal

$$\gamma_{\hat{S}_H}(T) = \gamma_{\hat{I}_H}(T) = \gamma_{\hat{S}_V}(T) = \gamma_{\hat{I}_V}(T) = 0.$$

Sistem optimal diperoleh dengan memasukkan kontrol optimal \bar{u} ke sistem persamaan *state* (9) dan *costate* (10) sehingga diperoleh sistem (5) yang optimal sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{S}_H}{dt} &= \mu - \beta_1 \bar{S}_H \bar{I}_H - (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \bar{I}_V + \phi \bar{I}_H - \mu \bar{S}_H + \bar{u}_3 \bar{I}_H \\ \frac{d\bar{I}_H}{dt} &= (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \bar{I}_V + \beta_1 \bar{S}_H \bar{I}_H - (\mu + \phi) \bar{I}_H - \bar{u}_3 \bar{I}_H \\ \frac{d\bar{S}_V}{dt} &= \eta - \beta \bar{S}_V \bar{I}_H - \eta \bar{S}_V - c\bar{u}_2 \bar{S}_V \\ \frac{d\bar{I}_V}{dt} &= \beta \bar{S}_V \bar{I}_H - \eta \bar{I}_V - c\bar{u}_2 \bar{I}_V. \\ \frac{d\gamma_{\bar{S}_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{S}_H} = (\beta_1 \bar{I}_H + (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{I}_V + \mu) \gamma_{\bar{S}_H} \\ &\quad + (-(1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{I}_V - \beta_1 \bar{I}_H) \gamma_{\bar{I}_H} \\ \frac{d\gamma_{\bar{I}_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{I}_H} = -B + (\beta_1 \bar{S}_H - \phi - \bar{u}_3) \gamma_{\bar{S}_H} + (-\beta_1 \bar{S}_H + \mu + \phi + \bar{u}_3) \gamma_{\bar{I}_H} \\ &\quad + \beta \bar{S}_V \gamma_{\bar{S}_V} - \beta \bar{I}_V \gamma_{\bar{I}_V} \\ \frac{d\gamma_{\bar{S}_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{S}_V} = (\beta \bar{I}_H + \eta + c\bar{u}_2) \gamma_{\bar{S}_V} - \beta \bar{I}_H \gamma_{\bar{I}_V} \\ \frac{d\gamma_{\bar{I}_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{I}_V} = (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \gamma_{\bar{S}_H} - (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \gamma_{\bar{I}_H} + (\eta + c\bar{u}_2) \gamma_{\bar{I}_V} \end{aligned}$$

dengan kondisi batas yaitu

$$\begin{aligned} \hat{S}_H(0) &= \hat{S}_{H_0}, \quad \hat{I}_H(0) = \hat{I}_{H_0}, \quad \hat{S}_V(0) = \hat{S}_{V_0}, \quad \hat{I}_V(0) = \hat{I}_{V_0}, \\ \gamma_{\hat{S}_H}(T) &= 0, \quad \gamma_{\hat{I}_H}(T) = 0, \quad \gamma_{\hat{S}_V}(T) = 0, \quad \text{ dan } \gamma_{\hat{I}_V}(T) = 0. \end{aligned}$$

Teorema (Kontrol Optimal)

Diberikan kontrol optimal $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ dan solusi *state* optimal $\bar{S}_H, \bar{I}_H, \bar{S}_V,$ dan \bar{I}_V yang meminimumkan fungsi objektif $J(u_1, u_2, u_3)$ sehingga terdapat variabel *costate* $\gamma_{\hat{S}_H}, \gamma_{\hat{I}_H}, \gamma_{\hat{S}_V},$ dan $\gamma_{\hat{I}_V}$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{\hat{S}_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{S}_H} = (\beta_1 \hat{I}_H + (1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V + \mu) \gamma_{S_H} \\ &\quad + (-(1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V - \beta_1 \hat{I}_H) \gamma_{I_H} \\ \frac{d\gamma_{\hat{I}_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{I}_H} = -B + (\beta_1 \hat{S}_H - \phi - u_3) \gamma_{S_H} \\ &\quad + (-\beta_1 \hat{S}_H + \mu + \phi + u_3) \gamma_{I_H} + \beta \hat{S}_V \gamma_{S_V} - \beta \hat{I}_V \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{\hat{S}_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{S}_V} = (\beta \hat{I}_H + \eta + cu_2) \gamma_{S_V} - \beta \hat{I}_H \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{\hat{I}_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\hat{I}_V} = (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{S_H} - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{I_H} \\ &\quad + (\eta + cu_2) \gamma_{I_V} \end{aligned}$$

dengan kondisi transversal

$$\gamma_{\hat{S}_H}(T) = \gamma_{\hat{I}_H}(T) = \gamma_{\hat{S}_V}(T) = \gamma_{\hat{I}_V}(T) = 0.$$

Selanjutnya, kontrol optimal \bar{u}_1, \bar{u}_2 dan \bar{u}_3 dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\gamma_{I_H} - \gamma_{S_H})m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V}{2C} \right), 1 \right\} \\ \bar{u}_3 &= \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{I_H} \hat{I}_H - \gamma_{S_H} \hat{I}_H}{2E} \right), 1 \right\} \end{aligned}$$

3. Simulasi Numerik

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah *Forward-Backward Sweep Method* dengan mendiskritisasi interval $[0, T]$ di titik-titik $t_i = 0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), dengan h merupakan ukuran langkah waktu sehingga $t_n = T$. Selanjutnya, variabel-variabel

$$u_1, u_2, u_3, \hat{S}_H, \hat{I}_H, \hat{S}_V, \hat{I}_V, \gamma_{\hat{S}_H}, \gamma_{\hat{I}_H}, \gamma_{\hat{S}_V},$$

dan $\gamma_{\hat{I}_V}$ dinyatakan dalam bentuk titik-titik

yaitu $u_1^i, u_2^i, u_3^i, \hat{S}_H^i, \hat{I}_H^i, \hat{S}_V^i, \hat{I}_V^i, \gamma_{\hat{S}_H}^i, \gamma_{\hat{I}_H}^i, \gamma_{\hat{S}_V}^i, \gamma_{\hat{I}_V}^i$.

Variabel *state* $\hat{S}_H, \hat{I}_H, \hat{S}_V$, dan \hat{I}_V didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 dengan nilai awal

$$\hat{S}_H(0) = \hat{S}_{H0}, \hat{I}_H(0) = \hat{I}_{H0}, \hat{S}_V(0) = \hat{S}_{V0},$$

dan $\hat{I}_V(0) = \hat{I}_{V0}$, sedangkan variabel *costate*

$\gamma_{\hat{S}_H}, \gamma_{\hat{I}_H}, \gamma_{\hat{S}_V}$, dan $\gamma_{\hat{I}_V}$ juga didekati dengan

metode Runge Kutta orde 4 dengan nilai awal

$$\gamma_{\hat{S}_H}(T) = 0, \gamma_{\hat{I}_H}(T) = 0, \gamma_{\hat{S}_V}(T) = 0,$$

dan $\gamma_{\hat{I}_V}(T) = 0$.

Algoritma *Forward-Backward Sweep Method* dijelaskan pada langkah-langkah berikut.

Langkah 1:

Inisialisasi nilai

$$u_1, u_2, u_{1old}, u_{2old}, u_{3old}, \hat{S}_H, \hat{I}_H, \hat{S}_V, \hat{I}_V,$$

$$\hat{S}_{Hold}, \hat{I}_{Hold}, \hat{S}_{Vold}, \hat{I}_{Vold}, \gamma_{\hat{S}_H}, \gamma_{\hat{I}_H}, \gamma_{\hat{S}_V}, \gamma_{\hat{I}_V},$$

$$\gamma_{\hat{S}_{Hold}}, \gamma_{\hat{I}_{Hold}}, \gamma_{\hat{S}_{Vold}}, \text{ dan } \gamma_{\hat{I}_{Vold}}$$

dalam bentuk vektor 0 dengan banyak elemen n , $it = 0$ dan $tes = 1$.

Mengganti nilai

$$u_{1old} = u_1, u_{2old} = u_2, u_{3old} = u_3, \hat{S}_{Hold} =$$

$$\hat{S}_H, \hat{I}_{Hold} = \hat{I}_H, \hat{S}_{Vold} = \hat{S}_V, \hat{I}_{Vold} =$$

$$\hat{I}_V, \gamma_{\hat{S}_{Hold}} = \gamma_{\hat{S}_H}, \gamma_{\hat{I}_{Hold}} = \gamma_{\hat{I}_H}, \gamma_{\hat{S}_{Vold}} = \gamma_{\hat{S}_V},$$

dan $\gamma_{\hat{I}_{Vold}} = \gamma_{\hat{I}_V}$.

Langkah 2:

Mengganti nilai

$$\hat{S}_H(0) = \hat{S}_{H0}, \hat{I}_H(0) = \hat{I}_{H0}, \hat{S}_V(0) = \hat{S}_{V0} \text{ dan}$$

$$\hat{I}_V(0) = \hat{I}_{V0}. \text{ Untuk } i = 0 : n - 1, \text{ hitung}$$

$$\hat{S}_H(i + 1), \hat{I}_H(i + 1), \hat{S}_V(i + 1) \text{ dan } \hat{I}_V(i + 1)$$

menggunakan Runge-Kutta orde 4 dan

memakai $u_{1old}, u_{2old}, u_{3old}$.

Langkah 3:

Mengganti nilai

$$\gamma_{\hat{S}_H}(n) = 0, \quad \gamma_{\hat{I}_H}(n) = 0,$$

$$\gamma_{\hat{S}_V}(n) = 0,$$

dan $\gamma_{\hat{I}_V}(n) = 0$. Untuk $k = n : 1$, hitung

$$\gamma_{\hat{S}_H}(k - 1), \gamma_{\hat{I}_H}(k - 1), \gamma_{\hat{S}_V}(k - 1),$$

dan $\gamma_{\hat{I}_V}(k - 1)$

menggunakan Runge-Kutta orde 4.

Langkah 4:

$$\text{Hitung } u_1(k - 1) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\gamma_{\hat{I}_H}(k-1) - \gamma_{\hat{S}_H}(k-1))m\beta_2\hat{S}_H(k-1)\hat{I}_V(k-1)}{2C} \right), 1 \right\},$$

$$u_2(k - 1) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{\hat{S}_V}(k-1)c\hat{S}_V(k-1) + \gamma_{\hat{I}_V}(k-1)c\hat{I}_V(k-1)}{2D} \right), 1 \right\},$$

dan

$$u_3(k - 1) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{\hat{I}_H}(k-1)\hat{I}_H(k-1) - \gamma_{\hat{S}_H}(k-1)\hat{I}_H(k-1)}{2E} \right), 1 \right\}.$$

Langkah 5:

Menghitung

$$\text{error}_{\hat{S}_H} = \text{sum}(\text{abs}(\hat{S}_H - \hat{S}_{Hold})), \text{error}_{\hat{I}_H} = \text{sum}(\text{abs}(\hat{I}_H - \hat{I}_{Hold}))$$

$$\text{error}_{\hat{S}_V} = \text{sum}(\text{abs}(\hat{S}_V - \hat{S}_{Vold})), \text{error}_{\hat{I}_V} = \text{sum}(\text{abs}(\hat{I}_V - \hat{I}_{Vold}))$$

$$\text{error}_{\gamma_{\hat{S}_H}} = \text{sum}(\text{abs}(\gamma_{\hat{S}_H} - \gamma_{\hat{S}_{Hold}})), \text{error}_{\gamma_{\hat{I}_H}} = \text{sum}(\text{abs}(\gamma_{\hat{I}_H} - \gamma_{\hat{I}_{Hold}}))$$

$$\text{error}_{\gamma_{\hat{S}_V}} = \text{sum}(\text{abs}(\gamma_{\hat{S}_V} - \gamma_{\hat{S}_{Vold}})), \text{error}_{\gamma_{\hat{I}_V}} = \text{sum}(\text{abs}(\gamma_{\hat{I}_V} - \gamma_{\hat{I}_{Vold}}))$$

$$\text{error}_{u_1} = \text{sum}(\text{abs}(u_1 - u_{1old})), \text{error}_{u_2} = \text{sum}(\text{abs}(u_2 - u_{2old}))$$

$$\text{error}_{u_3} = \text{sum}(\text{abs}(u_3 - u_{3old}))$$

$$\text{tes} = \text{error}_{\hat{S}_H} + \text{error}_{\hat{I}_H} + \text{error}_{\hat{S}_V} + \text{error}_{\hat{I}_V} + \text{error}_{\gamma_{\hat{S}_H}} + \text{error}_{\gamma_{\hat{I}_H}}$$

$$+ \text{error}_{\gamma_{\hat{S}_V}} + \text{error}_{\gamma_{\hat{I}_V}} + \text{error}_{u_1} + \text{error}_{u_2} + \text{error}_{u_3}$$

$$it = it + 1$$

$$u_1 = 0.5(u_1 + u_{1old}), u_2 = 0.5(u_2 + u_{2old})$$

$$u_3 = 0.5(u_3 + u_{3old})$$

Jika $tes > 10^{-3}$, maka kembali ke langkah 2.

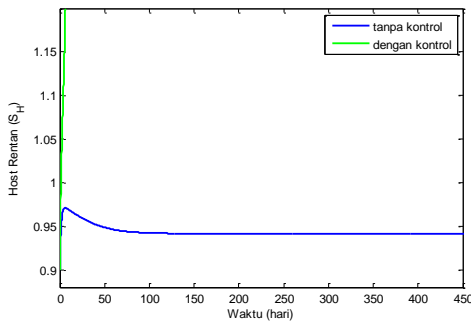
Cetak

$$\bar{S}_H = \hat{S}_H, \bar{I}_H = \hat{I}_H, \bar{S}_V = \hat{S}_V, \bar{I}_V = \hat{I}_V, \bar{u}_1 = u_1, \bar{u}_2 = u_2 \text{ dan } \bar{u}_3 = u_3.$$

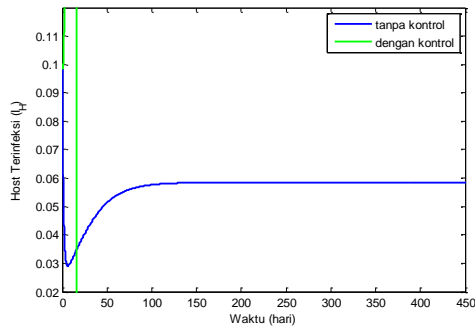
Untuk memberikan gambaran tentang model epidemik *host vector* dengan transmisi langsung dengan kontrol, dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 yang diimplementasikan pada MATLAB, dengan nilai awal $\hat{S}_H = 0.9, \hat{I}_H = 0.1, \hat{S}_V = 0.7$, dan $\hat{I}_V = 0.3$, dan nilai parameter pada Tabel 2, dengan bobot $B = 1, C = 1$, dan $D = 1$ pada fungsi objektif untuk melihat pengaruh adanya kontrol. Proses simulasi dilakukan dengan waktu awal $t = 0$ (hari) dan waktu akhir $T = 450$ (hari).

Tabel 2. Nilai Parameter

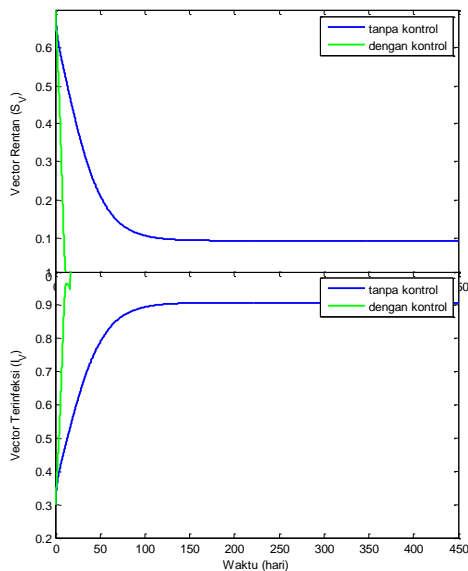
Parameter	Nilai
μ	0.4427
ϕ	0.9619
η	0.0046
β	0.7749
β_1	0.8173
β_2	0.8687
m	0.05



Gambar 2. Host yang Rentan



Gambar 3. Host yang Terinfeksi



Gambar 4. Vector yang Rentan

Gambar 5. Vector yang Terinfeksi

Pada Gambar 2 dapat diketahui bahwa terjadi perubahan yang sangat signifikan antara model tanpa variabel kontrol dan model dengan variabel kontrol. Apabila

diperhatikan dari waktu ke waktu grafik *host* yang rentan semakin naik. Hal itu berkaitan erat dengan Gambar 3 yang menunjukkan bahwa *host* yang terinfeksi mengalami penurunan pada hari ke-17 walaupun sebelumnya sempat terjadi kenaikan pada hari ke-5. Begitu pula dengan subpopulasi *vector*. Gambar 5 menunjukkan adanya kenaikan pada *vector* yang terinfeksi dan terlihat penurunan yang signifikan pada *vector* yang rentan pada hari ke-17 seperti terlihat pada Gambar 4.

Dengan demikian, penambahan variabel kontrol pada model sangat efektif dalam meminimalkan terjadinya infeksi antara *host-vector*.

PENUTUP

Pada jurnal ini telah dilakukan pengkajian tentang pengaruh penambahan kontrol pencegahan untuk meminimalkan kontak antara *host-vector*, kontrol insektisida untuk *vector*, dan kontrol pengobatan pada *host* yang terinfeksi pada model dengan transmisi langsung. Kontrol yang optimal ditentukan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Simulasi numerik model epidemik *host-vector* tanpa kontrol dan dengan kontrol dilakukan untuk mengkaji pengaruh pemberian kontrol pada model.

DAFTAR PUSTAKA

1. Augusto, F.B., M. Nizar, dan K.O. Okosun. 2012. Application of Optimal Control to the Epidemiology of Malaria. *Electronic Journal of Differential Equations*, 81:2012, 1-22
2. Cai, L. dan X. Li. 2010. Analysis of a Simple Vector-Host Epidemic Model with Direct Transmission. *Discrete Dynamical in Nature and Society*, 2010:2010, Article ID 679613, doi:10.1155/2010/679613
3. Chiang, A.C. dan K. Wainwright. 1927. *Fundamental Methods of Mathematical Economics (Fourth Edition)*. New York: McGraw-Hill/Irwin
4. Gopal, M. 1985. *Modern Control System Theory*. New Delhi: Mohinder Singh Sejwal for Wiley Eastern Limited
5. Kong, Q., Z. Qiu, Z. Sang, dan Y. Zou. 2011. Optimal Control of a Vector-Host Epidemics Model. *Mathematical Control and Related Fields*, 4:1, 493-508

6. Lenhart, S. dan J.T. Workman. 2007. *Numerical Solutions of Optimal Control Problems*. USA: Chapman and Hall, CRC Press
7. Ozair, M., A.A. Lashari, I.H. Jung, dan K.O. Okosun. 2012. Stability Analysis and Optimal Control of a Vector-Borne Disease with Nonlinear Incidence. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012:2012, Article ID 595487, doi:10.1155/2012/595487
8. Rodrigues, H.S., M.T.T. Monteiro, dan D.F.M. Torres. 2012. Modeling and Optimal Control Applied to a Vector Borne Disease. *Proceeding of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012*, III:2012, 1063-1070
9. Shim, E. 2004. *An Epidemic Model with Immigration of Infectives and Vaccination*. MSc. Thesis, The University of British Columbia