

KONTROL OPTIMAL MODEL EPIDEMIK HOST-VECTOR DENGAN SIMULASI MENGGUNAKAN FORWARD-BACKWARD SWEEP METHOD

Dewi Erla Mahmudah¹, Muhammad Zidny Naf'an²

¹. STMIK Asia Malang, ². Fasilkom Universitas Indonesia

e-mail: mdewierla@gmail.com, muhammad.zidny@ui.ac.id

ABSTRAKSI

Model epidemik host-vector dengan transmisi langsung diperluas dengan tiga pengendalian, yaitu kontrol pencegahan untuk meminimalkan kontak antara host-vektor, kontrol insektisida untuk vector, dan kontrol pengobatan pada host yang terinfeksi. Tujuannya adalah untuk memperoleh strategi pencegah yang optimal dengan biaya minimal. Karakterisasi kontrol optimal dilakukan secara analitik dengan menerapkan prinsip Minimum Pontryagin. Sistem kontinu yang diperoleh kemudian diselesaikan secara numerik dengan Forward-Backward Sweep Method untuk menyelidiki upaya pengendalian yang efektif dalam meminimalkan kejadian infeksi antara host-vector.

Kata kunci: Model epidemik host-vector, Transmisi langsung, Kontrol optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Forward-Backward Sweep Method.

ABSTRACT

Vector-host epidemic model with direct transmission expanded by three controls namely prevention to minimize contact between vector-host, insecticides and treatment. The objective is to obtain optimal prevention strategy with the minimum cost. Characterization optimal control done analytically by applying the Pontryagin Minimum Principle. The optimality system is then settled numerically with Forward-Backward Sweep Method to investigate that is effective in controlling effort to minimize the occurrence of an infection between hosts and vectors.

Keywords: Vector-host epidemic model, Direct transmission, Optimal control, Pontryagin Minimum Principle, Forward-Backward Sweep Method.

PENDAHULUAN

Penyakit menular adalah suatu penyakit yang dapat menular kepada individu (host) tertentu. Penyakit menular pada umumnya disebabkan oleh suatu agen (vector) biologi seperti bakteri, virus, jamur, atau parasit, dan bukan disebabkan oleh faktor fisik, seperti trauma benturan dan luka bakar, maupun faktor kimia, seperti keracunan. Penularan penyakit pada manusia melalui vector penyakit berupa serangga merupakan penyakit yang bersifat endemik maupun epidemik pada suatu daerah tertentu. Penyakit tersebut antara lain seperti malaria, demam berdarah, chikungunya, kaki gajah, disentri, dan lain-lain.

Model matematika berperan penting dalam suatu permasalahan dinamika penularan penyakit. Sebuah model sederhana

berperan penting dalam pengembangan pemahaman yang lebih baik dalam studi epidemiologi karena dapat membantu untuk memahami pola-pola epidemiologi yang diamati dan menerapkan berbagai strategi pengendalian penularan penyakit. Berbagai macam strategi pengendalian penyakit telah dilakukan dengan tujuan meminimalkan host yang terkena penyakit maupun sebagai upaya pencegahan. Baru-baru ini banyak penulis yang menganalisis strategi pengendalian penyakit pada model epidemik host dan vector. Misalnya, Augusto dkk. (2012) yang menganalisis strategi pengendalian penyakit malaria dengan menerapkan kontrol pada host yang rentan berupa pemberian tirai pada tempat tidur, kontrol pengobatan pada host yang terinfeksi, dan penyemprotan pada vector. Selain itu, Rodrigues dkk. (2012) telah melakukan

penelitian dengan studi kasus penyakit demam berdarah di daerah pulau Cape Verde yang melibatkan kontrol yang diberikan pada vector yaitu kontrol pada larva, kontrol pada vector yang rentan, dan kontrol mekanik pada habitat vector. Ozair dkk.(2012) juga telah melakukan penelitian tentang model epidemik vector-borne dengan laju infeksi nonlinear yang melibatkan kontrol pencegahan pada host yang rentan, kontrol pengobatan pada host yang terinfeksi, dan kontrol mekanik pada habitat vector. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa strategi pengendalian ini secara efektif dapat meminimalkan host yang terinfeksi.

Dalam memodelkan transmisi penyakit pada host dan vector, banyak penulis menganggap bahwa infeksi penyakit seperti malaria maupun demam berdarah ditransmisikan ke populasi manusia oleh serangga atau vector. Salah satunya adalah Kong dkk.(2011) yang membahas kontrol optimal model epidemik host-vector. Namun, beberapa studi kasus menunjukkan bahwa transmisi langsung seperti penularan host yang rentan oleh host yang terinfeksi juga dapat terjadi seperti pada penelitian Cai dan Li (2010). Tipe model SIS diterapkan dalam model epidemik pada host dan vector ini, dimana populasi host dan vector dibagi menjadi individu yang rentan dan individu yang terinfeksi.

Berdasarkan uraian di atas, dalam penelitian ini dibahas kontrol optimal model epidemik host-vector dengan transmisi langsung sebagai pengembangan dari penelitian Cai dan Li (2010). Pengembangan yang dilakukan pada penelitian ini adalah dengan menambahkan variabel kontrol pada model epidemik host-vector dengan transmisi langsung. Variabel-variabel kontrol tersebut adalah $u_1(t)$ dan $u_2(t)$. Kontrol $u_1(t)$ merupakan pencegahan kontak antara subpopulasi vector yang terinfeksi dengan subpopulasi host yang rentan, misalnya dengan pemakaian obat pada host yang rentan, dan kontrol $u_2(t)$ merupakan kontrol penyemprotan pada populasi vector. Penerapan kontrol pada model bertujuan untuk meminimalkan host yang terinfeksi dengan biaya yang minimum. Kontrol yang optimal ditentukan dengan menggunakan Hamiltonian. Kondisi-kondisi yang diperlukan untuk menentukan kontrol optimal diperoleh

dengan mengaplikasikan Prinsip Minimum Pontryagin.

KAJIAN TEORI

1. Teori Kontrol Optimal

Untuk memudahkan pemahaman permasalahan kontrol optimal, disajikan permasalahan dasar sebagai berikut.

Minimumkan $J(x(t), u(t)) = \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + \phi(x(T))$ (1)

dengan kendala $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (2)

dengan $x(0) = x_0$ (3)

dan $u(t) \in U, t \in [0, T]$. (4)

Persamaan (1) merupakan fungsi objektif dengan $J(x(t), u(t)) = \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + \phi(x(T))$ adalah $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ dan $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$ adalah u – vektor kontrol. Vektor state $x(t)$ memodelkan suatu keadaan. Hubungan $\dot{x}(t)$ dan $x(t)$ dapat dilihat pada persamaan (2) yang disebut persamaan state. Pada persamaan (3) ditentukan suatu state awal pada saat $t = 0$ yaitu x_0 , sedangkan persamaan (4) menyatakan bahwa $u(t)$ anggota daerah kontrol U (Chiang dan Wainwright, 1927).

2. Fungsi Hamilton

Fungsi Hamilton dengan tiga variabel, yaitu t, x, u yang masing-masing merepresentasikan waktu, vektor state, dan vektor kontrol, didefinisikan sebagai

$$H(x(t), u(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda^T (f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)) + \mu^T (g(x(t), u(t), t) - \dot{u}(t))$$

dengan $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ adalah x – vektor costate (Chiang dan Wainwright, 1927).

3. Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip Minimum Pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal karena prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal. Prinsip ini digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal yang meminimumkan fungsi objektif persamaan (1) dengan kendala persamaan (2) dan diberikan daerah kontrol persamaan (4).

Prosedur menyelesaikan masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin adalah sebagai berikut.

Langkah 1 :
Membentuk fungsi Hamilton

$$H(x, u, \lambda, t) = \dots + \lambda^T f(x, u, t)$$

Langkah 2 :
Mencari solusi fungsi Pontryagin yang memenuhi kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

 untuk mendapatkan $u^* = u^*(x, \lambda, t)$.

Langkah 3 :
Mengamati $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, u^*, \lambda, t) = \dots$

$$\lambda(t) = \min_{u \in U} H(x, u, \lambda, t)$$

Langkah 4 :
Menyelesaikan $\dot{x} = f(x, u^*, \lambda, t)$ (persamaan state),
 dan $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, u^*, \lambda, t)$ (persamaan costate)
 dengan kondisi transversal $\lambda(t_f) = 0$.

Langkah 5 :
Mensubstitusikan hasil dari Langkah 4 ke u^* untuk menentukan kontrol optimal (Gopal, 1985).

4. Fordward-Backward Sweep Method

Terdapat beberapa metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal, salah satunya ialah metode Sweep Maju-Mundur. Secara garis besar, algoritma metode ini sebagai berikut.

- Langkah 1: Menentukan nilai awal $x(0)$ dan menyimpan nilai x .
- Langkah 2: Menggunakan kondisi awal $x(0) = x_0$ dan nilai awal λ untuk menyelesaikan persamaan state \dot{x} dengan langkah maju metode Runge-Kutta orde 4.
- Langkah 3: Menggunakan kondisi transversal $\lambda(t_f) = 0$ dan nilai x dan λ untuk menyelesaikan persamaan costate $\dot{\lambda}$ dengan langkah mundur metode Runge Kutta orde 4.
- Langkah 4:

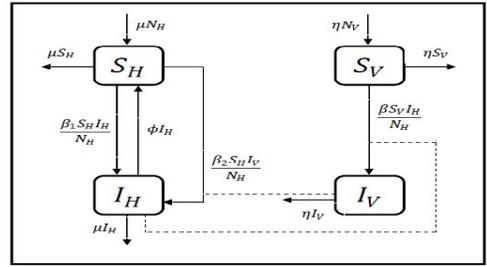
Memperbarui nilai kontrol u dengan memasukkan nilai x dan λ yang baru ke dalam karakteristik dari u .

Langkah 5:
Jika nilai error dari setiap variabel dalam iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka cetak nilai-nilai saat ini sebagai solusi. Tetapi, jika nilai errornya tidak sangat kecil maka kembali ke langkah 2 (Lenhart dan Workman, 2007).

5. Model Epidemik Host-Vektor dengan Transmisi Langsung

Model epidemik host-vector dengan transmisi langsung dimodelkan dengan model kompartemen tipe S_HI_HS_VI_V, dimana S_H (susceptibles) menunjukkan individu yang rentan dan I_H (infectious) menunjukkan individu yang terinfeksi. Populasi host dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu subpopulasi host yang rentan (S_H) dan subpopulasi host yang terinfeksi (I_H). Diasumsikan total populasi host, yang dinotasikan sebagai N_H adalah konstan, sehingga S_H + I_H = N_H. Begitu juga dengan populasi vector yang dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu subpopulasi vector yang rentan (S_V) dan subpopulasi vector yang terinfeksi (I_V). Total populasi vector adalah konstan dan dinotasikan sebagai N_V, dengan S_V + I_V = N_V. Nilai S_H, S_V, I_H, dan I_V tidak pernah bernilai negatif karena menyatakan jumlah populasi.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah diberikan pada batasan masalah pada Bab I, secara skematis penyebaran penyakit host-vector dengan transmisi langsung dapat digambarkan dalam model kompartemen seperti pada Gambar 1 dengan parameter-parameter pada Tabel 1.



Gambar 1. Model kompartemen epidemik host-vector dengan transmisi langsung

Tabel 1. Parameter-parameter model epidemi host-vector dengan transmisi langsung

Parameter	Keterangan
?	Laju kelahiran dan kematian alami populasi host
?	Laju kelahiran dan kematian alami populasi vector
γ_1	Laju infeksi subpopulasi host yang rentan akibat kontak dengan subpopulasi host yang terinfeksi
γ_2	Laju infeksi subpopulasi host yang rentan akibat kontak dengan subpopulasi vector yang terinfeksi
?	Laju infeksi subpopulasi vector yang rentan akibat kontak dengan subpopulasi host yang terinfeksi
?	Laju kesembuhan subpopulasi host yang terinfeksi

Model epidemi host-vector dengan transmisi langsung berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear sebagai berikut

$$\begin{cases} \frac{dS_H(t)}{dt} = \mu N_H(t) - \frac{\beta_1 S_H(t) I_H(t)}{N_H(t)} - \frac{\beta_2 S_H(t) I_V(t)}{N_H(t)} + \phi I_H(t) - \mu S_H(t) \\ \frac{dI_H(t)}{dt} = \frac{\beta_2 S_H(t) I_V(t)}{N_H(t)} + \frac{\beta_1 S_H(t) I_H(t)}{N_H(t)} - (\mu + \phi) I_H(t) \\ \frac{dS_V(t)}{dt} = \eta N_V(t) - \frac{\beta S_V(t) I_H(t)}{N_H(t)} - \eta S_V(t) \\ \frac{dI_V(t)}{dt} = \frac{\beta S_V(t) I_H(t)}{N_H(t)} - \eta I_V(t). \end{cases}$$

Untuk penyederhanaan penulisan, fungsi-fungsi terhadap t dinyatakan $S_H(t) = S_H, I_H(t) = I_H, S_V(t) = S_V, I_V(t) = I_V, N_H(t) = N_H, N_V(t) = N_V$.

Misal

$$\beta_1 = \frac{\beta_1}{N_H}, \beta_2 = \frac{\beta_2}{N_H}, \beta = \frac{\beta}{N_H}, \phi = \frac{\phi}{N_H}, \text{ dan}$$

$\eta = \frac{\eta}{N_V}$, maka sistem persamaan model *host-vector* dengan transmisi langsung adalah sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{d\hat{S}_H}{dt} = \mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H \\ \frac{d\hat{I}_H}{dt} = m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi) \hat{I}_H \\ \frac{d\hat{S}_V}{dt} = \eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V \\ \frac{d\hat{I}_V}{dt} = \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V. \end{cases}$$

Dinamika sistem persamaan di atas dibatasi pada daerah Γ yang didefinisikan sebagai

$$\Gamma = \{(S_H, I_H, S_V, I_V) \in R^4_+ : S_H, I_H, S_V, I_V \geq 0, S_H + I_H = 1, S_V + I_V = 1\}.$$

Cai dan Li, (2010).

PEMBAHASAN

1. Model Epidemik Host-Vector dengan Tansmisi Langsung dengan Kontrol

Model epidemi host-vector dengan transmisi langsung diperluas dengan menambahkan tiga variabel kontrol, yaitu kontrol pencegahan $u_1(t)$ berupa pemberian obat pada host rentan, kontrol insektisida $u_2(t)$ berupa pembasmian seluruh populasi vector dengan laju sebesar u_2 , dan kontrol pengobatan $u_3(t)$ berupa pemberian obat pada host yang terinfeksi. Model ini berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear sebagai berikut.

$$\begin{cases} \frac{d\hat{S}_H}{dt} = \mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H + u_3(t) \hat{I}_H \\ \frac{d\hat{I}_H}{dt} = (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi) \hat{I}_H - u_3(t) \hat{I}_H \\ \frac{d\hat{S}_V}{dt} = \eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V - cu_2 \hat{S}_V \\ \frac{d\hat{I}_V}{dt} = \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V - cu_2 \hat{I}_V. \end{cases} \tag{5}$$

2. Penyelesaian Kontrol Optimal

Penyelesaian kontrol optimal di sini bertujuan untuk meminimumkan subpopulasi host yang terinfeksi dan biaya yang digunakan untuk menerapkan kontrol $u_1, u_2, \text{ dan } u_3$ yaitu dengan meminimumkan fungsi objektif berikut

$$J(u_1, u_2) = \int_0^T B I_H(t) + C u_1^2(t) + D u_2^2(t) + E u_3^2(t) dt,$$

dengan kendala sistem persamaan (5), dengan B adalah bobot yang dikenakan pada host yang terinfeksi, C adalah bobot pada

biaya pemakaian obat pada host yang rentan, D adalah bobot pada biaya penyemprotan pada populasi vector, dan E adalah bobot pada biaya pemberian obat pada host yang terinfeksi, dengan $\gamma \in [0, 1]$. Kemudian akan ditentukan kontrol optimal u_1, u_2 dan u_3 sehingga berlaku

$J(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \min\{J(u_1, u_2, u_3) | u_1, u_2, u_3 \in U\}$,
dimana

$$U = \{(u_1, u_2, u_3) : 0 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq u_3 \leq 1\}.$$

Masalah kontrol optimal diselesaikan dengan memenuhi kondisi-kondisi pada Prinsip Minimum Pontryagin. Terlebih dahulu didefinisikan fungsi Hamilton sebagai berikut

$$\begin{aligned} H = & BI_H + Cu_1^2 + Du_2^2 + Eu_3^2 \\ & + \gamma_{S_H}(\mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H + u_3 \hat{I}_H) \\ & + \gamma_{I_H}((1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi) \hat{I}_H - u_3 \hat{I}_H) \\ & + \gamma_{S_V}(\eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V - cu_2 \hat{S}_V) \\ & + \gamma_{I_V}(\beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V - cu_2 \hat{I}_V), \end{aligned}$$

dengan

$$\gamma_{S_H} = \gamma_{S_H}(t), \gamma_{I_H} = \gamma_{I_H}(t), \gamma_{S_V} = \gamma_{S_V}(t) \text{ dan } \gamma_{I_V} = \gamma_{I_V}(t)$$

adalah variabel costate.

Menurut Prinsip Minimum Pontryagin, fungsi Hamilton mencapai solusi optimal jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

A. Kondisi Stasioner

Kondisi stasioner untuk kontrol u_1 :

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow 2Cu_1 + m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V \gamma_{S_H} - m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V \gamma_{I_H} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tilde{u}_1 = \frac{(\gamma_{I_H} - \gamma_{S_H})m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V}{2C}.$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_1 \leq 1$, solusi u_1 adalah

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} 0, & \tilde{u}_1 \leq 0 \\ \tilde{u}_1, & 0 \leq \tilde{u}_1 \leq 1 \\ 1, & \tilde{u}_1 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal u_1 dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_1 = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\gamma_{I_H} - \gamma_{S_H})m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V}{2C} \right), 1 \right\}. \quad (6)$$

Kondisi stationer untuk kontrol u_2 :

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow 2Du_2 - \gamma_{S_V} c \hat{S}_V - \gamma_{I_V} c \hat{I}_V = 0$$

$$\Leftrightarrow \tilde{u}_2 = \frac{\gamma_{S_V} c \hat{S}_V + \gamma_{I_V} c \hat{I}_V}{2D}.$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_2 \leq 1$, solusi u_2 adalah

$$\bar{u}_2 = \begin{cases} 0, & \tilde{u}_2 \leq 0 \\ \tilde{u}_2, & 0 \leq \tilde{u}_2 \leq 1 \\ 1, & \tilde{u}_2 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal u_2 dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_2 = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{S_V} c \hat{S}_V + \gamma_{I_V} c \hat{I}_V}{2D} \right), 1 \right\}. \quad (7)$$

Kondisi stationer untuk kontrol u_3 :

$$\frac{\partial H}{\partial u_3} = 0 \Leftrightarrow 2Eu_3 + \gamma_{S_H} \hat{I}_H - \gamma_{I_H} \hat{I}_H = 0$$

$$\Leftrightarrow \tilde{u}_3 = \frac{\gamma_{I_H} \hat{I}_H - \gamma_{S_H} \hat{I}_H}{2E}.$$

Karena didefinisikan $0 \leq u_3 \leq 1$, solusi u_3 adalah

$$\bar{u}_3 = \begin{cases} 0, & \tilde{u}_3 \leq 0 \\ \tilde{u}_3, & 0 \leq \tilde{u}_3 \leq 1 \\ 1, & \tilde{u}_3 \geq 1, \end{cases}$$

sehingga kontrol optimal u_3 dapat dinyatakan sebagai

$$\bar{u}_3 = \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{I_H} \hat{I}_H - \gamma_{S_H} \hat{I}_H}{2E} \right), 1 \right\}. \quad (8)$$

B. Persamaan State

Persamaan state untuk model epidemik host-vector dengan transmisi langsung dengan kontrol adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{S}_H}{d\gamma_{S_H}} = \frac{d\hat{S}_H}{dt} &= \mu - \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \phi \hat{I}_H - \mu \hat{S}_H + u_3 \hat{I}_H \\ \frac{d\hat{I}_H}{d\gamma_{I_H}} = \frac{d\hat{I}_H}{dt} &= (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V + \beta_1 \hat{S}_H \hat{I}_H - (\mu + \phi) \hat{I}_H - u_3 \hat{I}_H \\ \frac{d\hat{S}_V}{d\gamma_{S_V}} = \frac{d\hat{S}_V}{dt} &= \eta - \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{S}_V - cu_2 \hat{S}_V \\ \frac{d\hat{I}_V}{d\gamma_{I_V}} = \frac{d\hat{I}_V}{dt} &= \beta \hat{S}_V \hat{I}_H - \eta \hat{I}_V - cu_2 \hat{I}_V. \end{aligned} \quad (9)$$

dengan kondisi awal

$$S_H(0) = S_{H_0}, I_H(0) = I_{H_0}, S_V(0) = S_{V_0}, \text{ dan } S_H(0) = I_{V_0}.$$

C. Persamaan Costate

Persamaan costate untuk model epidemik host-vector dengan transmisi langsung dengan kontrol adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{S_H}}{dt} &= -\frac{dH}{dS_H} = (\beta_1 \hat{I}_H + (1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V + \mu)\gamma_{S_H} \\ &\quad + (-(1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V - \beta_1 \hat{I}_H)\gamma_{I_H} \\ \frac{d\gamma_{I_H}}{dt} &= -\frac{dH}{dI_H} = -B + (\beta_1 \hat{S}_H - \phi - u_3)\gamma_{S_H} \\ &\quad + (-\beta_1 \hat{S}_H + \mu + \phi + u_3)\gamma_{I_H} + \beta \hat{S}_V \gamma_{S_V} - \beta \hat{S}_V \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{S_V}}{dt} &= -\frac{dH}{dS_V} = (\beta \hat{I}_H + \eta + cu_2)\gamma_{S_V} - \beta \hat{I}_H \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{I_V}}{dt} &= -\frac{dH}{dI_V} = (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{S_H} - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{I_H} \\ &\quad + (\eta + cu_2)\gamma_{I_V} \end{aligned} \tag{10}$$

dengan kondisi transversal

$$\gamma_{S_H}(T) = \gamma_{I_H}(T) = \gamma_{S_V}(T) = \gamma_{I_V}(T) = 0.$$

Sistem optimal diperoleh dengan memasukkan kontrol optimal ke sistem persamaan state(9) dan costate(10) sehingga diperoleh sistem (5) yang optimal sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{S}_H}{dt} &= \mu - \beta_1 \bar{S}_H \bar{I}_H - (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \bar{I}_V + \phi \bar{I}_H - \mu \bar{S}_H + \bar{u}_3 \bar{I}_H \\ \frac{d\bar{I}_H}{dt} &= (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \bar{I}_V + \beta_1 \bar{S}_H \bar{I}_H - (\mu + \phi)\bar{I}_H - \bar{u}_3 \bar{I}_H \\ \frac{d\bar{S}_V}{dt} &= \eta - \beta \bar{S}_V \bar{I}_H - \eta \bar{S}_V - c\bar{u}_2 \bar{S}_V \\ \frac{d\bar{I}_V}{dt} &= \beta \bar{S}_V \bar{I}_H - \eta \bar{I}_V - c\bar{u}_2 \bar{I}_V \\ \frac{d\bar{\gamma}_{S_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{S}_H} = (\beta_1 \bar{I}_H + (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{I}_V + \mu)\bar{\gamma}_{S_H} \\ &\quad + (-(1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{I}_V - \beta_1 \bar{I}_H)\bar{\gamma}_{I_H} \\ \frac{d\bar{\gamma}_{I_H}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{I}_H} = -B + (\beta_1 \bar{S}_H - \phi - \bar{u}_3)\bar{\gamma}_{S_H} + (-\beta_1 \bar{S}_H + \mu + \phi + \bar{u}_3)\bar{\gamma}_{I_H} \\ &\quad + \beta \bar{S}_V \bar{\gamma}_{S_V} - \beta \bar{S}_V \bar{\gamma}_{I_V} \\ \frac{d\bar{\gamma}_{S_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{S}_V} = (\beta \bar{I}_H + \eta + c\bar{u}_2)\bar{\gamma}_{S_V} - \beta \bar{I}_H \bar{\gamma}_{I_V} \\ \frac{d\bar{\gamma}_{I_V}}{dt} &= -\frac{dH}{d\bar{I}_V} = (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \bar{\gamma}_{S_H} - (1 - \bar{u}_1)m\beta_2 \bar{S}_H \bar{\gamma}_{I_H} + (\eta + c\bar{u}_2)\bar{\gamma}_{I_V} \end{aligned}$$

dengan kondisi batas yaitu

$$\begin{aligned} \hat{S}_H(0) &= \hat{S}_{H0}, \quad \hat{I}_H(0) = \hat{I}_{H0}, \quad \hat{S}_V(0) = \hat{S}_{V0}, \quad \hat{I}_V(0) = \hat{I}_{V0}, \\ \gamma_{S_H}(T) &= 0, \quad \gamma_{I_H}(T) = 0, \quad \gamma_{S_V}(T) = 0, \quad \text{dan } \gamma_{I_V}(T) = 0. \end{aligned}$$

Teorema (Kontrol Optimal)

Diberikan kontrol optimal u_1^*, u_2^*, u_3^* dan solusi state optimal $S_H^*, I_H^*, S_V^*, I_V^*$ yang meminimumkan fungsi objektif $J(S_H, I_H, S_V, I_V, u_1, u_2, u_3)$ sehingga terdapat variabel costate $\gamma_{S_H}, \gamma_{I_H}, \gamma_{S_V}, \gamma_{I_V}$ yang memenuhi dengan kondisi transversal

$$\gamma_{S_H}(T) = \gamma_{I_H}(T) = \gamma_{S_V}(T) = \gamma_{I_V}(T) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_{S_H}}{dt} &= -\frac{dH}{dS_H} = (\beta_1 \hat{I}_H + (1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V + \mu)\gamma_{S_H} \\ &\quad + (-(1 - u_1)m\beta_2 \hat{I}_V - \beta_1 \hat{I}_H)\gamma_{I_H} \\ \frac{d\gamma_{I_H}}{dt} &= -\frac{dH}{dI_H} = -B + (\beta_1 \hat{S}_H - \phi - u_3)\gamma_{S_H} \\ &\quad + (-\beta_1 \hat{S}_H + \mu + \phi + u_3)\gamma_{I_H} + \beta \hat{S}_V \gamma_{S_V} - \beta \hat{S}_V \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{S_V}}{dt} &= -\frac{dH}{dS_V} = (\beta \hat{I}_H + \eta + cu_2)\gamma_{S_V} - \beta \hat{I}_H \gamma_{I_V} \\ \frac{d\gamma_{I_V}}{dt} &= -\frac{dH}{dI_V} = (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{S_H} - (1 - u_1)m\beta_2 \hat{S}_H \gamma_{I_H} \\ &\quad + (\eta + cu_2)\gamma_{I_V} \end{aligned}$$

Selanjutnya, kontrol optimal u_1^*, u_2^*, u_3^* dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\gamma_{I_H} - \gamma_{S_H})m\beta_2 \hat{S}_H \hat{I}_V}{\gamma C} \right), 1 \right\} \\ \bar{u}_3 &= \min \left\{ \max \left(0, \frac{\gamma_{I_H} \hat{I}_H - \gamma_{S_H} \hat{I}_H}{2E} \right), 1 \right\} \end{aligned}$$

3. Simulasi Numerik

Metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah Forward-Backward Sweep Method dengan mendiskritisasi interval $[0, T]$ di titik-titik $t_j = 0 + \Delta t (j = 0, 1, \dots, N)$, dengan Δt merupakan ukuran langkah waktu sehingga $\Delta t = \frac{T}{N}$. Selanjutnya, variabel-variabel

$$S_H^j, I_H^j, S_V^j, I_V^j, u_1^j, u_2^j, u_3^j,$$

dan γ_j dinyatakan dalam bentuk titik-titik

$$\text{yaitu } S_H^0, I_H^0, S_V^0, I_V^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0, \gamma_{S_H}^0, \gamma_{I_H}^0, \gamma_{S_V}^0, \gamma_{I_V}^0, \gamma_{S_H}^N, \gamma_{I_H}^N, \gamma_{S_V}^N, \gamma_{I_V}^N,$$

Variabel state $S_H^j, I_H^j, S_V^j, I_V^j$ didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 dengan nilai awal

$$S_H^0(0) = S_{H0}, \quad I_H^0(0) = I_{H0}, \quad S_V^0(0) = S_{V0}, \quad I_V^0(0) = I_{V0}$$

dan $\gamma_j(0) = \gamma_{j0}$, sedangkan variabel costate

x_1, x_2, x_3 , dan x_4 juga didekati dengan metode Runge Kutta orde 4 dengan nilai awal $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0,$ dan $x_4(0) = 0.$

Algoritma Forward-Backward Sweep Method dijelaskan pada langkah-langkah berikut.

Langkah 1:

Inisialisasi nilai

$$x_1, x_2, x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_4, x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, x_{1,3}, x_{2,3}, x_{3,3}, x_{1,4}, x_{2,4}, x_{3,4}, x_{1,5}, x_{2,5}, x_{3,5}, x_{1,6}, x_{2,6}, x_{3,6}, x_{1,7}, x_{2,7}, x_{3,7}, x_{1,8}, x_{2,8}, x_{3,8}, x_{1,9}, x_{2,9}, x_{3,9}, x_{1,10}, x_{2,10}, x_{3,10}, \text{ dan } x_4$$

dalam bentuk vektor 0 dengan banyak elemen $n, n = 0$ dan $n = 1.$

Mengganti nilai

$$x_{1,1} = x_1, x_{2,1} = x_2, x_{3,1} = x_3, x_{1,2} = x_1, x_{2,2} = x_2, x_{1,3} = x_1, x_{2,3} = x_2, x_{1,4} = x_1, x_{2,4} = x_2, x_{1,5} = x_1, x_{2,5} = x_2, x_{1,6} = x_1, x_{2,6} = x_2, x_{1,7} = x_1, x_{2,7} = x_2, x_{1,8} = x_1, x_{2,8} = x_2, x_{1,9} = x_1, x_{2,9} = x_2, x_{1,10} = x_1, x_{2,10} = x_2, \text{ dan } x_4$$

Langkah 2:

Mengganti nilai

$$x_1(0) = x_{1,0}, x_2(0) = x_{2,0}, x_3(0) = x_{3,0}$$

$x_1(0)$ dan $x_2(0) = x_{1,0}$. Untuk $t = 0 : t - 1$, hitung

$$x_1(t+1), x_2(t+1), x_3(t+1) \text{ dan } x_4$$

1) menggunakan Runge-Kutta orde 4 dan

memakai $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}$.

Langkah 3:

Mengganti nilai

$$x_1(t) = 0, x_2(t) = 0, x_3(t) = 0,$$

dan $x_4(t) = 0.$ Untuk $t = 1 : 10$, hitung

$$x_1(t-1), x_2(t-1), x_3(t-1),$$

$$\text{dan } x_4(t-1)$$

menggunakan Runge-Kutta orde 4.

Langkah 4:

$$\text{Hitung } u_1(k-1) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(y_H(k-1) - y_{S_H}(k-1)) \cdot m \cdot \beta_2 \cdot S_H(k-1) \cdot I_H(k-1)}{2C} \right), 1 \right\},$$

$$u_2(k-1) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{y_{S_V}(k-1) \cdot c \cdot S_V(k-1) + y_{I_V}(k-1) \cdot c \cdot I_V(k-1)}{2D} \right), 1 \right\},$$

dan

$$u_3(k-1) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{y_{I_H}(k-1) \cdot I_H(k-1) - y_{S_H}(k-1) \cdot I_H(k-1)}{2E} \right), 1 \right\}.$$

Langkah 5:

Menghitung

$$\text{error } \hat{S}_H = \text{sum}(\text{abs}(\hat{S}_H - \hat{S}_{H,old})), \text{error } \hat{I}_H = \text{sum}(\text{abs}(\hat{I}_H - \hat{I}_{H,old}))$$

$$\text{error } \hat{S}_V = \text{sum}(\text{abs}(\hat{S}_V - \hat{S}_{V,old})), \text{error } \hat{I}_V = \text{sum}(\text{abs}(\hat{I}_V - \hat{I}_{V,old}))$$

$$\text{error } y_{S_H} = \text{sum}(\text{abs}(y_{S_H} - y_{S_H,old})), \text{error } y_{I_H} = \text{sum}(\text{abs}(y_{I_H} - y_{I_H,old}))$$

$$\text{error } y_{S_V} = \text{sum}(\text{abs}(y_{S_V} - y_{S_V,old})), \text{error } y_{I_V} = \text{sum}(\text{abs}(y_{I_V} - y_{I_V,old}))$$

$$\text{error } u_1 = \text{sum}(\text{abs}(u_1 - u_{1,old})), \text{error } u_2 = \text{sum}(\text{abs}(u_2 - u_{2,old}))$$

$$\text{error } u_3 = \text{sum}(\text{abs}(u_3 - u_{3,old}))$$

$$\text{tes} = \text{error } \hat{S}_H + \text{error } \hat{I}_H + \text{error } \hat{S}_V + \text{error } \hat{I}_V + \text{error } y_{S_H} + \text{error } y_{I_H} + \text{error } y_{S_V} + \text{error } y_{I_V} + \text{error } u_1 + \text{error } u_2 + \text{error } u_3$$

$$it = it + 1$$

$$u_1 = 0.5(u_1 + u_{1,old}), u_2 = 0.5(u_2 + u_{2,old})$$

$$u_3 = 0.5(u_3 + u_{3,old})$$

Jika $\text{tes} > 10^{-3}$, maka kembali ke langkah 2.

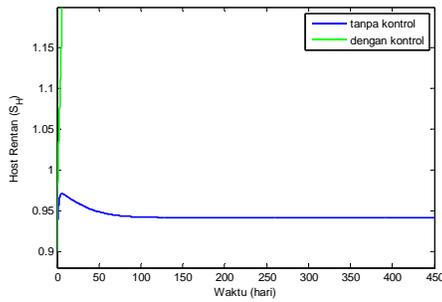
Cetak

$$\bar{S}_H = \hat{S}_H, \bar{I}_H = \hat{I}_H, \bar{S}_V = \hat{S}_V, \bar{I}_V = \hat{I}_V, \bar{u}_1 = u_1, \bar{u}_2 = u_2 \text{ dan } \bar{u}_3 = u_3.$$

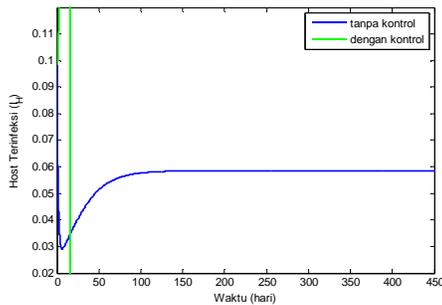
Untuk memberikan gambaran tentang model epidemik hostvector dengan transmisi langsung dengan kontrol, dilakukan simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 yang diimplementasikan pada MATLAB, dengan nilai awal $x_1 = 0.9, x_2 = 0.1, x_3 = 0.7$, dan $x_4 = 0.3$, dan nilai parameter pada Tabel 2, dengan bobot $w = 1, w = 1$, dan $w = 1$ pada fungsi objektif untuk melihat pengaruh adanya kontrol. Proses simulasi dilakukan dengan waktu awal $t = 0$ (hari) dan waktu akhir $t = 450$ (hari).

Tabel 2. Nilai Parameter

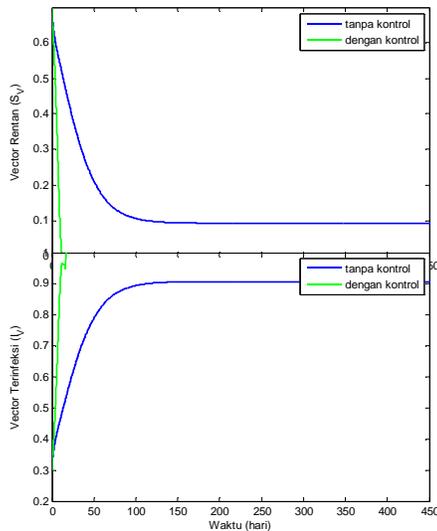
Parameter	Nilai
μ	0.4427
ϕ	0.9619
η	0.0046
β	0.7749
β_1	0.8173
β_2	0.8687
m	0.05



Gambar 2.Host yang Rentan



Gambar 3.Host yang Terinfeksi



Gambar 4.Vector yang Rentan

Gambar 5.Vector yang Terinfeksi

Pada Gambar 2 dapat diketahui bahwa terjadi perubahan yang sangat signifikan antara model tanpa variabel kontrol dan model dengan variabel kontrol. Apabila

diperhatikan dari waktu ke waktu grafik host yang rentan semakin naik. Hal itu berkaitan erat dengan Gambar 3 yang menunjukkan bahwa host yang terinfeksi mengalami penurunan pada hari ke-17 walaupun sebelumnya sempat terjadi kenaikan pada hari ke-5. Begitu pula dengan subpopulasi vector. Gambar 5 menunjukkan adanya kenaikan pada vector yang terinfeksi dan terlihat penurunan yang signifikan pada vector yang rentan pada hari ke-17 seperti terlihat pada Gambar 4.

Dengan demikian, penambahan variabel kontrol pada model sangat efektif dalam meminimalkan terjadinya infeksi antara host-vector.

PENUTUP

Pada jurnal ini telah dilakukan pengkajian tentang pengaruh penambahan kontrol pencegahan untuk meminimalkan kontak antara host-vektor, kontrol insektisida untuk vector, dan kontrol pengobatan pada host yang terinfeksi pada model dengan transmisi langsung. Kontrol yang optimal ditentukan dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Simulasi numerik model epidemik host-vector tanpa kontrol dan dengan kontrol dilakukan untuk mengkaji pengaruh pemberian kontrol pada model.

DAFTAR PUSTAKA

1. Agosto, F.B., M. Nizar, dan K.O. Okosun. 2012. Application of Optimal Control to the Epidemiology of Malaria. *Electronic Journal of Differential Equations*, 81:2012, 1-22
2. Cai, L. dan X. Li. 2010. Analysis of a Simple Vector-Host Epidemic Model with Direct Transmission. *Discrete Dynamical in Nature and Society*, 2010:2010, Article ID 679613, doi:10.1155/2010/679613
3. Chiang, A.C. dan K. Wainwright. 1927. *Fundamental Methods of Mathematical Economics (Fourth Edition)*. New York: McGraw-Hill/Irwin
4. Gopal, M. 1985. *Modern Control System Theory*. New Delhi: Mohinder Singh Sejwal for Wiley Eastern Limited
5. Kong, Q., Z. Qiu, Z. Sang, dan Y. Zou. 2011. Optimal Control of a Vector-Host Epidemics Model. *Mathematical Control and Related Fields*, 4:1, 493-508

6. Lenhart, S. dan J.T. Workman. 2007. Numerical Solutions of Optimal Control Problems. USA: Chapman and Hall, CRC Press
7. Ozair, M., A.A. Lashari, I.H. Jung, dan K.O. Okosun. 2012. Stability Analysis and Optimal Control of a Vector-Borne Disease with Nonlinear Incidence. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2012:2012, Article ID 595487, doi:10.1155/2012/595487
8. Rodrigues, H.S., M.T.T. Monteiro, dan D.F.M. Torres. 2012. Modeling and Optimal Control Applied to a Vector Borne Disease. *Proceeding of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012, III:2012, 1063-1070*
9. Shim, E. 2004. An Epidemic Model with Immigration of Infectives and Vaccination. MSc. Thesis, The University of British Columbia