Jurnal Ilmiah Teknologi dan Informasia ASIA (JITIKA)
Vol.10, No.2, Agustus 2016
ISSN: 0852-730X

Perbandingan Skema Numerik Metode *Finite Difference* dan *Spectral*

Lukman Hakim[1], Azwar Riza Habibi[2]
STMIK Asia Malang
Email: [1]bledeklukman@gmail.com,[2] riza.bj@gmail.com

ABSTRAK. Persamaan diferensial merupakan salah satu alat yang biasanya digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan model matematika. Mengingat dengan persamaan diferensial akan lebih mudah diperoleh hasil dan interpretasi solusi yang mendekati tujuan dari suatu permasalahan. Disisi lain, persamaan diferensial tidak semuanya mudah untuk diselesaikan secara analitik, sehingga perlu adanya metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Numerik merupakan metode yang bisa digunakan untuk memecahkan masalah yang rumit dari model matematika. Adapun metode numerik yang akan dibahas dalam artikel ini yaitu metode *finite difference* dan *spectral*. Kedua metode ini akan dibandingkan skema numeriknya untuk menentukan solusi persamaan diferensial orde dua, dan selanjutnya dianalisis tingkat eror dari masing-masing metode. Oleh karena itu, akan diperoleh keefektifan metode numerik yang bisa digunakan untuk menentukan solusi model matematika yang telah ditentukan.

Kata Kunci: *Persamaan Diferensial, Numerik, Finite Difference, Spectral*

1. PENDAHULUAN

Model matematika merupakan salah satu pendekatan ilmiah yang bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang bersifat sains, teknik, dan sosial. Dikarenakan dalam menyelesaikan dengan pendekatan model matematika selalu berdasarkan metode dan teorema-teorema yang telah diuji kebenarannya secara ilmiah. Dalam ilmu matematika metode yang popular digunakan untuk menyelesaikan masalah adalah metode analitik dan metode numerik. Metode analitik merupakan metode yang digunakan dalam menyelesaikan masalah sehingga diperoleh solusi sejati (*exact solution*), sedangkan metode numerik merupakan metode pendekatan yang digunakan untuk mendapatkan solusi yang mampu menghampiri solusi sejatinya (Munir, 2003).

Pada metode numerik terkenal istilah *the big three methods* yaitu metode *finite difference, finite element,* dan *spectral*. Logika yang digunakan pada metode *finite difference* dan *finite element* yaitu metode ekspansi deret taylor, sedangkan metode *spectral* melalui pendekatan interpolasi dan transformasi. Dengan pendekatan teori yang berbeda dari masing-masing metode, maka akan didapatkan pendekatan solusi untuk persamaan diferensial dengan galat yang berbeda (Kersale, 2002).

2. SKEMA NUMERIK

2.1 Skema Numerik Metode *Finite Difference*

Metode *finite difference* pada dasarnya menggunakan ekspansi deret taylor dalam mengaproksimasi nilai turunan. Ekspansi deret taylor untuk $u(x)$ di sekitar $x = x_n$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$u(x_n + h) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + \cdots \qquad 2.1$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u'(x_n) &= \frac{u(x_n + h) - u(x_n)}{h} + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + \cdots \\ &= \frac{u(x_n + h) - u(x_n)}{h} + O(h), \end{aligned} \qquad 2.2$$

dengan demikian diperoleh turunan pertama di titik $x = x_n$, adalah

$$u'(x_n) = \frac{du(x_n)}{dx} = \frac{u_{n+1} - u_n}{h}, \qquad 2.3$$

dan persamaan (2.3) disebut dengan metode beda maju dengan kesalahan pemotongan orde pertama. Dengan analog pada kasus metode beda maju, maka diperoleh ekspansi deret taylor untuk $u(x_n - h)$ sebagai berikut:

$$u'(x_n) = \frac{du(x_n)}{dx} = \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \qquad 2.4$$

dan persamaan (2.4) disebut dengan metode beda mundur. Selanjutnya dengan mengurangkan antara metode beda maju dengan beda mundur, akan diperoleh metode baru sebagai berikut:

$$u'(x_n) = \frac{du(x_n)}{dx} = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}, \qquad 2.5$$

dan persamaan (2.5) disebut dengan metode beda pusat (Causon dan Mingham, 2010).

Dalam artikel ini skema numerik *finite difference* diaproksimasi menggunakan metode pusat. Misal diketahui persamaan diferensial berikut

$$u''(x) = u'(x) + u(x) + r, \quad u(a) = A, u(b) = B, \qquad 2.6$$

maka saat $x = x_n$ persamaan (2.6) menjadi:

$u''(x_n) = u'(x_n) + u(x_n) + r.$

Selanjutnya, dengan aproksimasi beda pusat dari persamaan (2.6) diperoleh

$$\left(1 - \frac{h}{2}\right)u_{n+1} - (2 + h^2)u_n + \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_{n-1} = rh^2. \qquad 2.7$$

Jika persamaan (2.7) dengan menjalankan indeks n, untuk $n = 1$ maka

$$-(2 + h^2)u_1 + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_2 = rh^2 - \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_0,$$

dengan $u(0) = A$ sehingga diperoleh

$$-(2 + h^2)u_1 + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_2 = rh^2 - \left(1 + \frac{h}{2}\right)A,$$

untuk $n = 2$ maka

$$\left(1 + \frac{h}{2}\right)u_1 - (2 + h^2)u_2 + \left(1 - \frac{h}{2}\right)u_3 = rh^2,$$

$\vdots$

untuk $n = N - 2$ maka

$$\left(1 - \frac{h}{2}\right)u_{N-1} - (2 + h^2)u_{N-2} + \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_{N-3} = rh^2,$$

untuk $n = N - 1$ maka

$$\left(1 - \frac{h}{2}\right)u_N - (2 + h^2)u_{N-1} + \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_{N-2} = rh^2,$$

dengan $u(N) = B$ sehingga diperoleh

$$-(2 + h^2)u_{N-1} + \left(1 + \frac{h}{2}\right)u_{N-2} = rh^2 - \left(1 - \frac{h}{2}\right)B.$$

Misal $\alpha = -(2 + h^2)$, $\beta = \left(1 - \frac{h}{2}\right)$, dan $\gamma = \left(1 + \frac{h}{2}\right)$, maka bisa tulis dalam bentuk matrik yaitu:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \beta & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rh^2 - \gamma A \\ rh^2 \\ rh^2 \\ \vdots \\ rh^2 \\ rh^2 - \beta B \end{bmatrix}. \qquad 2.8$$

Matrik pada persamaan (2.8) disebut dengan matriks skema numerik metode *finite difference*.

2.2 Skema Numerik Metode *Spektral*

Ekspansi spektral fungsi real satu variabel $u(x)$ dapat direpresentasikan oleh proyeksi orthogonal dengan fungsi basis $\phi_k(x)$ berikut (Boyd, 2000):

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k \phi_k(x) \qquad 2.9$$

dimana $\hat{u}_k = \frac{\langle \phi_k, u \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}$ dan selanjutnya persamaan (2.9) merupakan ekspansi spektral dari $u(x)$. Fungsi basis ϕ_k dalam artikel ini menggunakan pendekatan polinomial Chebyshev

$T_k(x) = cos\left(k\, cos^{-1}(x)\right).$

Koefisien ekspansi $\hat{u}_k$ didekati dengan metode *quadrature*, dimana untuk polinomial Chebyshev $T_k(x) = cos\left(k\, cos^{-1}(x)\right)$ dan titik *quadrature* Gauss-Lobatto x_j diberikan secara eksplisit berikut

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, \dots\dots, N.$$

Misal $D^{(1)}$ dan $D^{(2)}$ adalah matriks turunan orde pertama dan kedua untuk pendekatan ekspansi spectral dan didefinisikan sebagai berikut:

$$D_{kl}^{(1)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{c_k}\right) \times 2l\,, & k+l \text{ ganjil}, l > k \\ 0 \quad , & \text{yang lainnya} \end{cases}$$
$$D_{kl}^{(2)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{c_k}\right) \times (l-k)l(l+k)\,, & k+l \text{ genap}\,, l > k \\ 0 \quad , & \text{yang lainnya} \end{cases} \quad 2.10$$

dimana $0 \le k, l \le N$ dan $c_k = \begin{cases} 2, k = 0 \\ 1, k > 0 \end{cases}$.

Secara singkat dalam artikel ini skema numerik metode *spectral* dijalankan dengan langkah-langkah berikut:

1. Membentuk matriks turunan Chebyshev

$\mathcal{L}\bar{u}(x) = s(x)$

$\mathcal{L}u = A\frac{d^2u}{dx^2} + B\frac{du}{dx} + Cu$

$L = AD^{(2)} + BD^{(1)} + CI$

dimana $D^{(1)}$ dan $D^{(2)}$ adalah matriks turunan orde pertama dan kedua.

2. Menentukan titik *quadrature* (x_j)
3. Membentuk matriks (Φ)

$\Phi_{jk} = T_k(x_j)$

4. Membentuk matriks $(M_{jl}) = (\Phi_{jk})(L_{kl})$ untuk $1 \le j \le N-1$
5. Menentukan elemen (M_{jl}) untuk $j = 0$ dan $j = N$ berdasarkan kondisi batas
6. Menentukan $\hat{u} = M^{-1}s(x_j)$
7. Menentukan $\bar{u}(x)$

(Kersale, 2003).

3. PEMBAHASAN

Pada artikel ini akan dipaparkan dalam menentukan skema numerik untuk metode *finite difference* dan *spectral* dalam menentukan solusi persamaan diferensial orde biasa orde dua. Diberikan persamaan diferesial biasa orde dua berikut:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - 4\frac{du(x)}{dx} + 4u(x) = e^x - \frac{4e}{1+e^2} \qquad , x \in (-1,1)$$

dengan kondisi batas Dirichlet $u(-1) = u(1) = 0$, dan memiliki solusi eksak (*analytical solutions*),

$$u(x) = e^x - \frac{e(e^{2x}+1)}{1+e^2}.$$

3.1 Metode *Finite Difference*

Dengan pendekatan metode beda pusat diperoleh skema numerik untuk turunan pertama dan kedua dari u sebagai berikut:

$$\frac{u_{r+1} - 2u_r + u_{r-1}}{h^2} - 4\frac{u_{r+1} - u_{r-1}}{2h} + 4u_r = e^{x_r} - \frac{4e}{1+e^2}$$
$$\frac{u_{r+1}}{h^2} - \frac{2u_r}{h^2} + \frac{u_{r-1}}{h^2} - \frac{2u_{r+1}}{h} + \frac{2u_{r-1}}{h} + 4u_r = e^{x_r} - \frac{4e}{1+e^2}$$
$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h}\right)u_{r+1} + \left(-\frac{2}{h^2} + 4\right)u_r + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h}\right)u_{r-1} = e^{x_r} - \frac{4e}{1+e^2}.$$

Misal

$$A = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h}\right), \quad B = \left(-\frac{2}{h^2} + 4\right), \quad C = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h}\right), \qquad \text{dan} \quad S(x_r) = e^{x_r} - \frac{4e}{1+e^2},$$

maka diperoleh

$$r = 1 \Rightarrow Au_2 + Bu_1 + Cu_0 = S(x_1)$$

dengan $u_0 = 0 \Rightarrow Au_2 + Bu_1 = S(x_1)$

$$r = 1 \Rightarrow Au_2 + Bu_1 = S(x_1)$$

$r = 2 \Rightarrow Au_3 + Bu_2 + Cu_1 = S(x_2)$

$r = 3 \Rightarrow Au_4 + Bu_3 + Cu_2 = S(x_3)$

$r = 4 \Rightarrow Au_5 + Bu_4 + Cu_3 = S(x_4)$

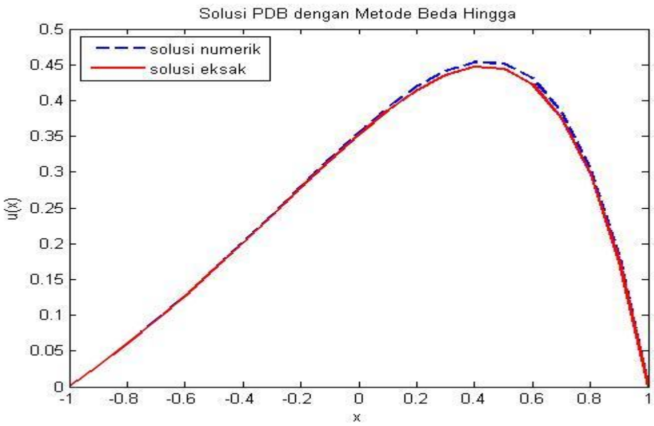
$\vdots$

$r = N-4 \Rightarrow Au_{N-3} + Bu_{N-4} + Cu_{N-5} = S(x_{N-4})$

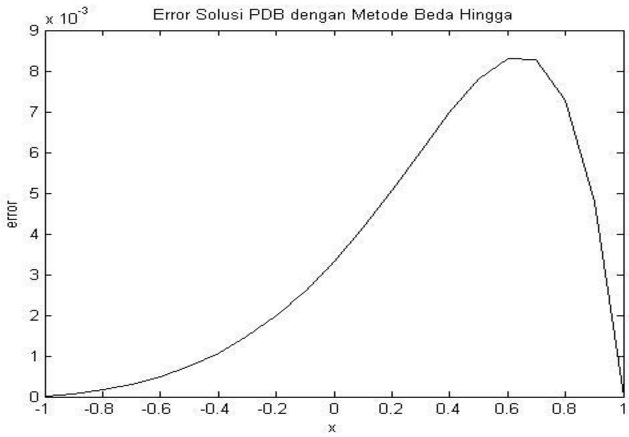
$r = N-3 \Longrightarrow Au_{N-2} + Bu_{N-3} + Cu_{N-4} = S(x_{N-3})$
$r = N-2 \Longrightarrow Au_{N-1} + Bu_{N-2} + Cu_{N-3} = S(x_{N-2})$
$r = N-1 \Longrightarrow Au_{N} + Bu_{N-1} + Cu_{N-2} = S(x_{N-1})$
dengan $u_N = 0 \Longrightarrow Bu_{N-1} + Cu_{N-2} = S(x_{M-1})$.
$r = N-1 \Longrightarrow Bu_{N-1} + Cu_{N-2} = S(x_{N-1})$
Berdasarkan sistem persamaan di atas, maka didapatkan skema numerik *finite difference* dalam bentuk matriks berikut:

$$\begin{pmatrix} B & A & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C & B & A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & B & A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & C & B & A & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & B & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(x_1) \\ S(x_2) \\ S(x_3) \\ S(x_4) \\ \vdots \\ S(x_{N-2}) \\ S(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Dengan bantuan *software* Matlab, diperoleh grafik solusi yang bisa dilihat pada Gambar 1dan grafik eror yang ditunjukkan pada Gambar 2 sebagai berikut:



Gambar 1. Solusi PDB dengan Metode *Finite Difference*



Gambar 2. Eror Solusi dengan Metode *Finite Difference*

3.2 Metode *Spectral*

Langkah-langkah menentukan skema numerik metode *spectral* dipaparkan sebagai berikut:

1. Membentuk matriks turunan Chebyshev

$$\mathcal{L}u = \frac{d^2u}{dx^2} - 4\frac{du}{dx} + 4u$$

$$S(x) = e^x - \frac{4e}{1+e^2}$$

Pendekatan solusi dari persamaan differensial yaitu $\bar{u}(x)$ sebagai ekspansi spektral dan dalam artikel ini menggunakan basis lima polinomial Chebyshev yaitu $N = 4$,

$$\bar{u}(x) = \sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k T_k(x)$$

$$R(x) = \mathcal{L}\bar{u}(x) - s(x) = \sum_{k=0}^{4}\sum_{l=0}^{4} L_{kl}\hat{u}_l T_k(x) - \sum_{k=0}^{4} \hat{s}_k T_k(x),$$

dimana L adalah matriks dari operator differensial $\mathcal{L}$ pada basis $(T_0, T_1, T_2, T_3, T_4)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\bar{u}(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k T_k(x) - 4\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k T_k(x) + 4\sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k T_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{4} D_{kl}^{(2)} \hat{u}_k T_k(x) - 4\sum_{k=0}^{4} D_{kl}^{(1)} \hat{u}_k T_k(x) + 4\sum_{k=0}^{4} I_{kl}\hat{u}_k T_k(x).\end{aligned}$$

dengan $D^{(1)}$ dan $D^{(2)}$ adalah matriks turunan orde pertama dan kedua. Menggunakan kaidah persamaan (2.10) diperoleh matriks turunan Chebyshev,

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya substitusi matriks $D^{(1)}$dan $D^{(2)}$ pada persamaan,

$$\begin{aligned} L &= D^{(2)} - 4D^{(1)} + 4I \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & -12 & 32 \\ 0 & 4 & -16 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -24 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Menentukan titik *quadrature* (x_j)

Kemudian ditentukan titik *quadrature* Chebyshev-Gauss-Lobatto, yaitu:

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right) \Rightarrow \{x_j\} = \left\{\cos\frac{\pi j}{4}, 0 \le j \le 4\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1\right\},$$

dan ekspansi koefisien dari pendekatan solusi $\bar{u}(x)$ harus memenuhi sistem linier berikut:

$$\sum_{k=0}^{4}\sum_{l=0}^{4} L_{kl}\hat{u}_l T_k(x_j) = s(x_j),$$

yang ekuivalen dengan

$$\sum_{k=0}^{4}\sum_{l=0}^{4} \Phi_{jk} L_{kl}\hat{u}_l \equiv \sum_{l=0}^{4} M_{jl}\hat{u}_l = s(x_j).$$

3. Membentuk matriks (Φ)

Didefinisikan matriks (Φ), yaitu: $\Phi_{jk} = T_k(x_j) = \cos\left(\frac{k\pi j}{4}\right)$, sehingga diperoleh

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Membentuk matriks $(M_{jl}) = (\Phi_{jk})(L_{kl})$ untuk $1 \le j \le N-1$

$$M = \Phi L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2(2-\sqrt{2}) & 4(1-2\sqrt{2}) & -2(6-5\sqrt{2}) & 28 \\ 4 & 0 & 0 & 12 & -12 \\ 4 & -2(2+\sqrt{2}) & 4(1+2\sqrt{2}) & 2(6+5\sqrt{2}) & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Menentukan elemen (M_{jl}) untuk $j = 0$ dan $j = N$ berdasarkan kondisi batas yang diberikan, yaitu:

$$\sum_{l=0}^{4} M_{jl}\hat{u}_l = s(x_j)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2(2-\sqrt{2}) & 4(1-2\sqrt{2}) & -2(6-5\sqrt{2}) & 28 \\ 4 & 0 & 0 & 12 & -12 \\ 4 & -2(2+\sqrt{2}) & 4(1+2\sqrt{2}) & 2(6+5\sqrt{2}) & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(x_0) \\ s(x_1) \\ s(x_2) \\ s(x_3) \\ s(x_4) \end{pmatrix}.$$

Jika baris pertama, $j = 0$ diganti dengan kondisi batas $\bar{u}(1) = 0$, mengakibatkan

$$\bar{u}(1) = \sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k T_k(1) = \sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k (1)^k = \sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k = 0,$$

dan baris terakhir, $j = 4$ diganti dengan kondisi batas $\bar{u}(-1) = 0$, mengakibatkan

$$\bar{u}(-1) = \sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k T_k(-1) = \sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k (-1)^k = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2(2-\sqrt{2}) & 4(1-2\sqrt{2}) & -2(6-5\sqrt{2}) & 28 \\ 4 & 0 & 0 & 12 & -12 \\ 4 & -2(2+\sqrt{2}) & 4(1+2\sqrt{2}) & 2(6+5\sqrt{2}) & 28 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(x_0) \\ s(x_1) \\ s(x_2) \\ s(x_3) \\ s(x_4) \end{pmatrix}.$$

6. Menentukan $\hat{u} = M^{-1}s(x_j)$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2(2-\sqrt{2}) & 4(1-2\sqrt{2}) & -2(6-5\sqrt{2}) & 28 \\ 4 & 0 & 0 & 12 & -12 \\ 4 & -2(2+\sqrt{2}) & 4(1+2\sqrt{2}) & 2(6+5\sqrt{2}) & 28 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} s(x_0) \\ s(x_1) \\ s(x_2) \\ s(x_3) \\ s(x_4) \end{pmatrix}$$

7. Menentukan $\bar{u}(x)$

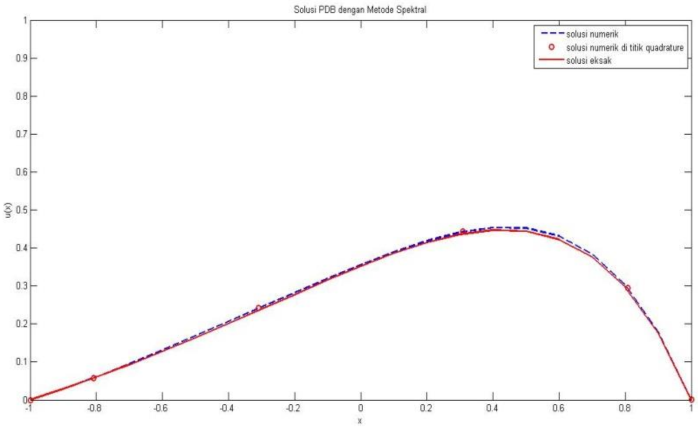
Pendekatan solusi persamaan diferensial biasa $(\bar{u}(x))$ dihitung dengan aturan berikut:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x) &= \sum_{k=0}^{4} \hat{u}_k T_k(x) = \hat{u}_0 T_0(x) + \hat{u}_1 T_1(x) + \hat{u}_2 T_2(x) + \hat{u}_3 T_3(x) + \hat{u}_4 T_4(x) \\ &= (\hat{u}_0 - \hat{u}_2 + \hat{u}_4) + (\hat{u}_1 + \hat{u}_3)x + 2\hat{u}_2 x^2 + 4\hat{u}_3 x^3 + 8\hat{u}_4 x^4\end{aligned}$$

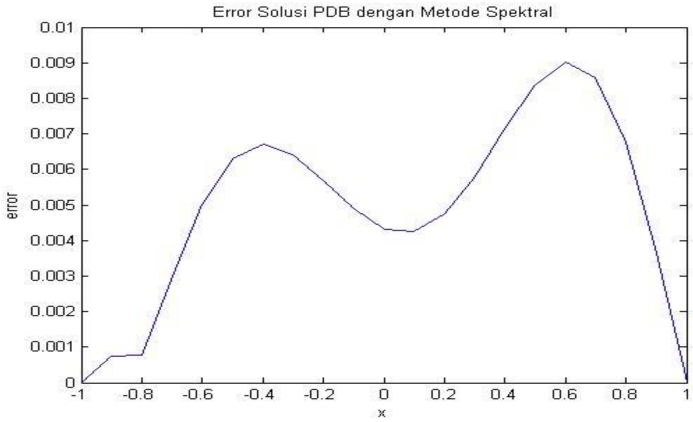
Dengan bantuan *software* Matlab diperoleh nilai $\hat{u}_k$ untuk $k = 0,1,2,3,4$ sebagai berikut:

$$\hat{u}_0 = 0.1875,\ \hat{u}_1 = 0.0887,\ \hat{u}_2 = 0.1565,\ \hat{u}_3 = -0.0887, \text{dan } \hat{u}_4 = -0.0310,$$

dan diperoleh $\bar{u}(x) = 0.313x^2 - 0.3548x^3 - 0.248x^4$. Sehingga grafik solusi dan eror untuk persamaan diferensial didapatkan seperti pada Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 3. Solusi PDB dengan Metode *Spectral*



Gambar 4. Eror Solusi dengan Metode *Spectral*

4. KESIMPULAN

Metode *spectral* lebih efisien dibandingkan dengan metode *finite difference*. Dikarenakan fungsi basis yang digunakan pada metode *spectral* berlaku untuk semua domain, sedangkan pada metode *finite difference* fungsi basis yang digunakan untuk masing-masing subdomain berbeda-beda. Disisi lain terlihat bahwa perilaku dari solusi numerik untuk metode *spectral* lebih mendekati solusi analitik dibandingkan dengan metode *finite difference.*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Boyd. P. John. 2000. *Chebyshev anf Fourier Spectral Methods.* University of Michigan. New York.
[2] Causon, D.M dan Mingham, C.G. 2010. *Introductory Finite Difference Method for PDE'S.*
[3] Kersale, E. 2002. *Introduction to Spectral Methods*. Dept. of Applied Mathematics of University of Leeds. France.
[4] Munir, R. 2003. *Metode Numerik: Revisi Kedua*. Informatika Bandung. Bandung.